

УДК 539.3

МОДЕЛИ АППРОКСИМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ ОТКЛИКА В ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

М. А. ЧУБАНЬ^{1*}, Р. И. ШЕЙЧЕНКО², Р. В. ГРАБОРОВ²

¹ Кафедра «Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, УКРАИНА

² ООО Научно-инженерный центр УК «РэйлТрансХолдинг», Мариуполь, УКРАИНА

*email: s803@tmm-sapr.org

АННОТАЦИЯ При точечной аппроксимации функции отклика в ходе построения модели при выполнении оптимизации машиностроительных конструкций следует учитывать, что нахождение дополнительных точек может быть дорогостоящим с точки зрения затрат времени и ресурсов. Исходя из этого, выгодно поэтапно использовать модели поверхности отклика разных степеней точности. Рассмотрены и применены для тестовых задач методы линейной и билинейной аппроксимации. Дана оценка погрешности обоих методов на тестовых примерах.

Ключевые слова: линейная аппроксимация, билинейная аппроксимация, поверхность отклика, метод конечных элементов, метод конечных разностей, машиностроительная конструкция, синтез параметров.

APPROXIMATION OF THE RESPONSE SURFACE FOR USING IN THE PROCESS OF THE PARAMETRIC SYNTHESIS OF THE ENGINEERING STRUCTURES

М. CHUBAN^{1*}, R. SHEYCHENKO², R. GRABOROV²

¹ Department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Kharkiv, UKRAINE

² JSC "Science Engineering Center UK" RailTransHolding", Mariupol, UKRAINE

ABSTRACT It should be taken into account that the find of additional points can be costly in terms of time and resources during the spot approximation of the response functions in the model building in process of parametric synthesis of engineering structures. Based on this, it is advantageous to use response surface model of various degrees of precision. To consider and apply the methods of linear and bilinear approximation to the test problems is the goal of this article. The essence of the proposed approach to linear and bilinear approximation is as follows: in the vicinity of the nodal point of a grid, thrown over the area varying parameters, the response function is approximated by linear or bilinear functions. These functions are defined in the cells adjacent to the current node. Thus, the real surface is approximated by "scaly" surface. The necessary for approximation values of interested parameters of the optimizing constructions for different combinations of its design parameters were obtained as the result of numerical calculations by the using of the finite element method. Derivatives at the nodal points were found by the using of the finite difference method. The error of both methods was evaluated on test examples. For considered test problems the first-order empirical model with interaction of parameters showed slightly better results than the linear model, although it requires more calculations for building. Accuracy of linearization and bilinearization methods is ranged from 0 to 40%. At the same time, in some cases using of bilinearization method can give a more accurate approximation of the actual response surface than using of linear approximation. This is illustrated on the example of some specially selected function.

Keywords: linear approximation, bilinear approximation, response surface, finite element method, finite difference method, engineering design, synthesis of parameters.

Введение

В статьях [1, 2] было отмечено, что в инженерной практике во многих случаях для построения дискретных эмпирических моделей в ходе параметрического синтеза используют точечную аппроксимацию. При этом функция отклика $f(p)$ неизвестна, а связь между параметрами p и f представляется в виде таблицы $\{p_i, f_i\}$. Это означает, что дискретному множеству значений аргумента p_i

поставлено в соответствие множество значений функции $f_i, i = 0, 1, \dots, n$. Эти значения являются или результатами численных расчетов, или экспериментальными данными. Этот факт следует учитывать при выборе точности математической модели для оптимизации. Так, для построения модели первого порядка аппроксимации необходимо 2^S решения задачи анализа интересующего показателя конструкции или значения экспериментальных данных (для модели второго порядка – 3^S и т. д.), которые, в

зависимости от исследуемого объекта, могут быть очень сложными или дорогостоящими. В приведенных формулах s – число рассматриваемых параметров.

Цель работы

Цель данной статьи – рассмотреть эти методы и модели, а также применить методы линейной и билинейной аппроксимации для решения тестовых задач.

Анализ методов и моделей

Вообще, модель первого порядка аппроксимации будет подходящей, когда исследователь интересуется приближением истинной поверхности отклика на относительно небольшой области пространства независимых переменных в зоне небольшой кривизны функции отклика [3]. Но часто кривизна истинной поверхности отклика достаточна для того, чтобы линейная модель стала неподходящей. В таких ситуациях требуется модель более высокого порядка [4].

Что касается оптимизации объектов машиностроения, то форма поверхности отклика в этом случае обычно заранее неизвестна. Поэтому в инженерной практике с точки зрения соотношения затраченных ресурсов и получаемой точности в процессе оптимизации выгодно поэтапно использовать модели нескольких порядков [5, 6]. Сначала строят линейную модель функции отклика – грубое приближение, – из которой определяют область, где предположительно находится ее минимум (или максимум). Далее в этой области увеличивают количество «реперных» точек [1] (узлов) и строят более точную модель. Такой метод называется методом последовательных сгущений.

Для случая двух независимых переменных модель первого порядка выглядит так [7]:

$$z = \gamma_0 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2, \quad (1)$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – некоторые коэффициенты, которые легко вычислить.

Такая модель первого порядка аппроксимации называется моделью главных эффектов, так как она включает только главные эффекты от переменных p_1 и p_2 . Так, варьирование параметров p_1 и p_2 , взятых отдельно, некоторым образом влияет на оцениваемые показатели конструкции (напряжения, перемещения, массу), но значения этих показателей могут меняться гораздо больше, если варьировать два параметра

одновременно. В модель учет взаимодействия между параметрами может быть добавлен следующим образом:

$$z = \gamma_0 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_{12} p_1 p_2, \quad (2)$$

Это модель первого порядка с учетом взаимодействия.

Постановка задачи

Данный теоретический материал по построению эмпирической модели был применен для решения тестовой задачи по определению рационального сочетания параметров двухступенчатого стержня.

Ставилась задача найти функцию отклика по напряжениям для жестко защемленного по обоим концам ступенчатого стержня, находящегося под действием вертикальной силы, при варьировании характеристик материала двух его ступеней, а именно модуля упругости.

Сначала при помощи метода конечных элементов (МКЭ) [8 - 11] были получены решения задачи анализа напряженного состояния при изменении параметров для получения так называемой истинной функции отклика. В качестве номинальной точки было принято сочетание значений параметров $p_1^0 = p_2^0 = 2 \cdot 10^{11}$. Остальные необходимые узловые точки были получены из формулы:

$$p_i = p_i^0 \cdot (1 \pm \alpha_i^0) \quad (3)$$

Коэффициент α лежит в интервале (0;1) и изменяется с шагом 0,05. Соответственно, модуль упругости варьируется в пределах от $0,5 \cdot 10^{11}$ до $4 \cdot 10^{11}$ Па. В итоге интервалы переменных p_1 и p_2 были разбиты на 35 подынтервалов и было найдено 1296 решений задачи анализа напряженного состояния. Построенную по этим данным поверхность отклика и считали действительной, рис. 1. (В данном случае напряжения отнесены к напряжениям при базовом сочетании параметров).

Непосредственно суть предложенного подхода к линейной и билинейной аппроксимации заключается в следующем: в окрестности узловой точки некоторой сетки, наброшенной на область варьирования параметров ($p_1^0; p_2^0$), функция отклика аппроксимируется в виде линейных или билинейных функций. Эти функции определены в

ячейках, смежных с текущим узлом. Таким образом, действительная поверхность аппроксимируется «чешуйчатой» поверхностью.

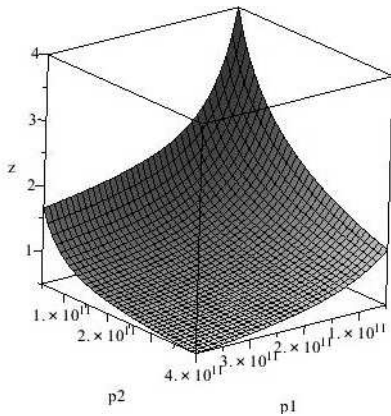


Рис. 1 – Действительная функция отклика (относительные напряжения)

Линейная аппроксимирующая функция в каждом квадранте строится через номинальную точку и две соседние угловые точки и имеет следующий вид:

$$z = f(p_1^0; p_2^0) + f'_x(p_1^0; p_2^0) \cdot (p_1 - p_1^0) + f'_y(p_1^0; p_2^0) \cdot (p_2 - p_2^0) \quad (4)$$

Производные в нулевой точке находились при помощи метода конечных разностей (МКР) [12, 13].

На рис. 2 изображены функция отклика и ее линейная аппроксимация (темным цветом) в одной системе координат.

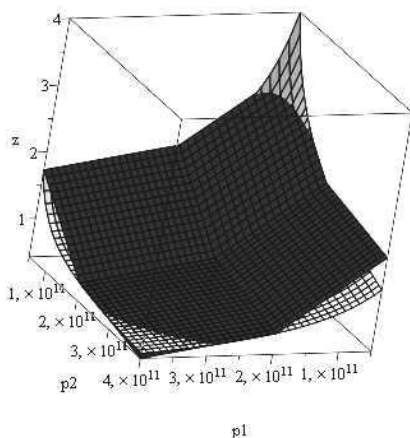


Рис. 2 – Функция отклика и ее линейная аппроксимация в одной системе координат

На рис.3 представлена разница между действительными значениями функции и значениями, полученными из аппроксимирующей функции.

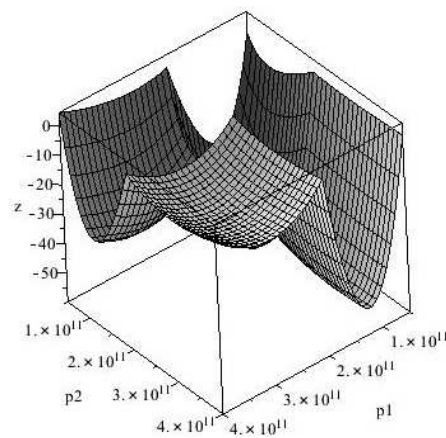


Рис. 3 – Отклонение аппроксимирующей функции от действительной, %

Таким образом, определено, что погрешность при линейной аппроксимации для данной задачи в разных точках поверхности составляет от 0 до 40%.

Выражение ж для билинейной аппроксимации функции состоит из суммы линейной части и смешанной производной по двум независимым переменным:

$$z = f(p_1^0; p_2^0) + f'_x(p_1^0; p_2^0) \cdot (p_1 - p_1^0) + f'_y(p_1^0; p_2^0) \cdot (p_2 - p_2^0) + f''_{xy}(p_1^0; p_2^0) \times (p_1 - p_1^0) \cdot (p_2 - p_2^0) \quad (5)$$

Билинейная аппроксимация поверхности отклика продемонстрирована на рис. 4.

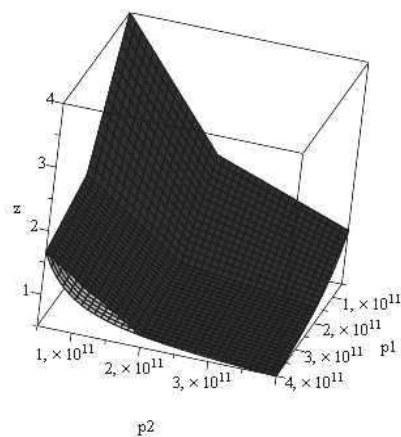


Рис. 4 – Билинейная аппроксимация поверхности отклика

Что касается погрешности, с которой билинейная поверхность описывает истинную, она также для данной задачи составляет около 40%, рис. 5.

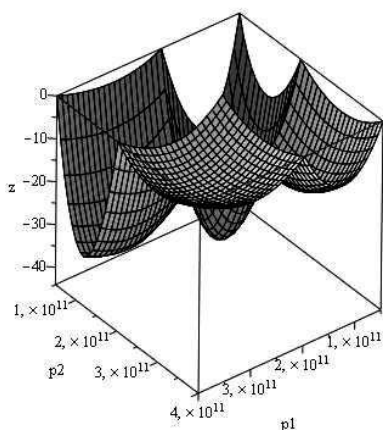


Рис. 5 – Погрешность билинейной аппроксимации, %

Тестовая задача № 2

Методы линеаризации и билинеаризации поверхности отклика были также применены для схожей задачи, при прежних геометрии, характеристиках материала и нагрузках, с той разницей, что вместо жесткой заделки для концов стержня было задано кинематическое граничное условие шарнирное опирание.

Как выглядит поверхность отклика по напряжениям в этом случае, представлено на рис. 6.

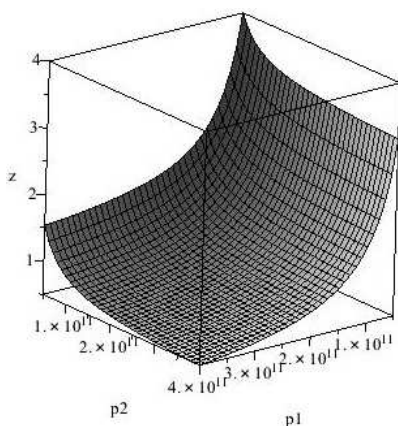


Рис. 6 – Поверхность отклика при граничных условиях в виде шарнирного опирания

Линейная и билинейная аппроксимации поверхности отклика, построенные по тем же алгоритмам, что и в предыдущей задаче, изображены на рис. 7, 8 соответственно.

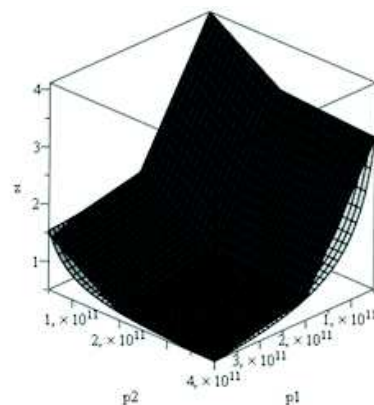


Рис. 7 – Линейная аппроксимация поверхности отклика для задачи с шарнирным опиранием

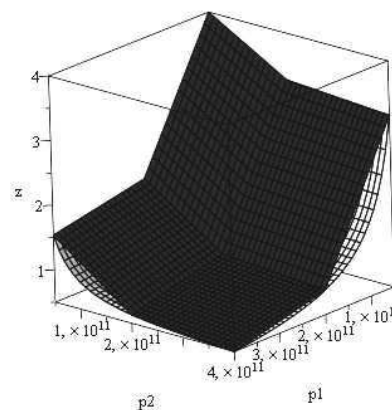


Рис. 8 – Билинейная аппроксимация поверхности отклика для задачи с шарнирным опиранием

Погрешность аппроксимации для данной функции находится в пределах от 0 до 45% при линейной аппроксимации, и примерно такая же – при билинейной. Разность аппроксимирующих линейной и билинейной функций не превышает 5%, рис. 9 .

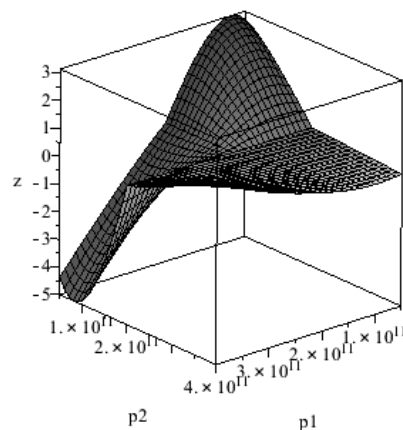


Рис. 9 – Разность аппроксимирующих функций, %

То есть, на данных тестовых примерах эмпирическая модель первого порядка с учетом взаимодействия параметров показала ненамного лучший результат, чем линейная модель, хотя требует для построения больше вычислений.

Тем не менее, в некоторых случаях, метод билинейной аппроксимации может давать практически 100%-ную сходимость аппроксимирующей и аппроксимированной функций, а линейная модель – такую же погрешность. Это наглядно видно на примере некоторой функции $f = 5 \cdot p_1 - 2 \cdot p_1 \cdot p_2 + 4 \cdot p_2 + 8$, рис. 10.

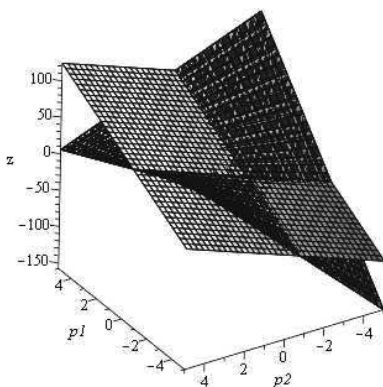


Рис. 10 – Функция и ее линейная и билинейная аппроксимации

Также в качестве достоинства билинейной аппроксимации хотелось бы отметить, что она дает возможность непрерывно аппроксимировать функцию отклика во всем диапазоне изменения параметров.

Выводы

В статье рассмотрены и опробованы для реальных задач оптимизации простейшие виды точечной аппроксимации поверхности отклика – линейная и билинейная аппроксимации. Для данных задач оба метода работают приблизительно одинаково. В то же время, в отдельных случаях при использовании метода билинеаризации следует ожидать более точной аппроксимации действительной поверхности отклика, чем при линейной аппроксимации.

Список литературы

1 **Литвиненко, А. В.** Метод линеаризации поверхности отклика в задаче обоснования проектных параметров тонкостенных элементов машиностроительных

конструкций. / **А. В. Литвиненко, Р. И. Шейченко, Р. В. Граборов., М. А. Бондаренко** // *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Проблеми механічного приводу.* – 2014. – №31(1074). – С. 88 - 98.

2 **Бондаренко, М. А.** Билинеаризация поверхности отклика в оптимизационных исследованиях тонкостенных элементов машиностроительных конструкций / **М. А. Бондаренко, Р. И. Шейченко, Р. В. Граборов, Д. Г. Шинкин, Д. В. Киричук** // *Механіка та машинобудування. Науково-технічний журнал.* – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 1. – С. 18 - 23.

3 **Zhang, H.** Linearly constrained global optimization via piecewise-linear approximation / **H. Zhang, Sh. Wang** // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* – 2008. – 214. – P. 111 - 120.

4 **Anderson, M.** RSM simplified: optimizing progress using response surface methods for experiments / **M. Anderson, P. Whitcomb** – New York: Productivity Press, a division of Kraus Productivity Organization, Ltd. – 2005. – 289 p.

5 **Avalle, M.** Design optimization by response surface methodology: application to crashworthiness design of vehicle structures / **M. Avalle, G. Chiandussi, G. Belingardi** // *Structural and Multidisciplinary Optimization.* – 2002. – Vol. 24, Issue 4, – P 325-332.

6 **Bas, D.** Modeling and optimization I: Usability of response surface methodology / **D. Bas, I. Boyaci** // *Journal of Food Engineering.* . – 2007. . – 78. . – P 836 - 845.

7 **Myers, R.** Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments. - 3rd ed. / **R. Myers, D. Montgomery, C. Anderson-Cook.** – New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken. . – 2009. – 1247 p.

8 **Mitchell, A. R.** The Finite Element Method in Partial Differential Equations. / **A. R. Mitchell, R. Wait** – New York: Wiley. – 1977. – 216 p.

9 **Strang, G.** An Analysis of the Finite Element Method. / **G. Strang, G. J. Fix** – New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs. – 1973. – 351 p.

10 **Zienkiewicz, O. C.** The Finite Element Method. Vol. 1: Basic Formulation and Linear Problems / **O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor** – London: Mc Graw-Hill. – 1989. – 648 p.

11 **Flaherty, J. E.** Finite Element Analysis / **J. E. Flaherty** – New York: Spring. – 2000. – 323 p.

12 **Самарский, А. А.** Методы решения сеточных уравнений / **А. А. Самарский, Е. С. Николаев** – Москва: Наука. – 1978. – 592 с.

13 **Ильин, В. П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. / **В. П. Ильин** – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. – 2000. – 345 с.

Bibliography (transliterated)

1 **Litvinenko, A. V., Sheychenko, R. I., Graborov, R. V., Bondarenko, M. A.** Metod linezatsii poverhnosti otklika v zadache obosnovaniya proektnykh parametrov tonkostennykh elementov mashinostroitelnykh konstruksiy. *VIsnik NTU «KhPI». SerIya: Problemi mehanichnogo privodu*, 2014, 31(1074), 88 - 98.

2 **Bondarenko, M. A., Sheychenko, R. I., Graborov, R. V., Shinkin, D. G., Kirichuk, D. V.** Bilinearizatsiya poverhnosti otklika v optimizatsionnykh issledovaniyah tonkostennykh elementov mashinostroitelnykh konstruksiy. *Mehaniika ta mashinobuduvannya. Naukovo-tehnichniy zhurnal*. Kharkiv: NTU «KhPI», 2014, 1, 18 - 23.

- 3 **Zhang, H., Wang, Sh.** Linearly constrained global optimization via piecewise-linear approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 214, 111 - 120.
- 4 **Anderson, M., Whitcomb, P.** RSM simplified: optimizing progress using response surface methods for experiments. New York: Productivity Press, a division of Kraus Productivity Organization, Ltd, 2005, 289 p.
- 5 **Avalle, M. Chiandussi, G., Belingardi, G.** Design optimization by response surface methodology: application to crashworthiness design of vehicle structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24(4), 325 - 332.
- 6 **Bas, D., Boyaci, I.** Modeling and optimization I: Usability of response surface methodology. *Journal of Food Engineering*, 2007, 78, 836 - 845.
- 7 **Myers, R., Montgomery, D., Anderson-Cook, C.** Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments. - 3rd ed. *New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken*, 2009, 1247 p.
- 8 **Mitchell, A. R., Wait, R.** The Finite Element Method in Partial Differential Equations. New York: Wiley, 1977, 216 p.
- 9 **Strang, G., Fix, G. J.** An Analysis of the Finite Element Method. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973, 351 p.
- 10 **Zienkiewicz, O. S., Taylor, R. L.** The Finite Element Method. Basic Formulation and Linear Problems. London: Mc Graw-Hill, 1989, 1, 648 p.
- 11 **Flaherty, J. E.** Finite Element Analysis New York: Spring, 2000, 323 p.
- 12 **Samarskiy, A. A., Nikolaev, E. S.** Metodyi resheniya setochnykh uravneniy. Moskva: Nauka, 1978, 592 p.
- 13 **Ilin, V. P.** Metodyi konechnykh raznostey i konechnykh ob'emov dlya ellipticheskikh uravneniy. Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki, 2000, 345 p.

Сведения об авторах (About authors)

Чубань Марина Александровна – аспирант каф. Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина; e-mail: s803@tmm-sapr.org.

Chuban Maryna – postgraduate student at the Department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: s803@tmm-sapr.org.

Шейченко Роман Игоревич – главный конструктор проекта вагонов-цистерн ООО Научно-инженерный центр УК «РэйлТрансХолдинг», Мариуполь, Украина.

Sheychenko Roman – chief designer of the tank-car project at the JSC "Science Engineering Center UK" RailTransHolding", Mariupol, Ukraine.

Граборов Роман Викторович – начальник группы технических расчетов ООО Научно-инженерный центр УК «РэйлТрансХолдинг», Мариуполь, Украина.

Graborov Roman – chief of technical calculations group of the JSC "Science Engineering Center UK" RailTransHolding", Mariupol, Ukraine.

Пожалуйста ссылайтесь на эту статью следующим образом:

Чубань, М. А. Модели аппроксимации поверхности отклика в оптимизационных исследованиях машиностроительных конструкций / **М. А. Чубань, Р. И. Шейченко, Р. В. Грабов** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Новые решения в современных технологиях.* – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2015. – № 62 (1171). – С. 46 - 51. – ISSN 2079-5459.

Please cite this article as:

Chuban, M., Sheychenko, R., Graborov, R. Approximation of the response surface for using in the process of the parametric synthesis of the engineering structures. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies.* – Kharkiv: NTU "KhPI", 2015, 62 (1171), 46 - 51, ISSN 2079-5459.

Будь ласка посилайтеся на цю статтю наступним чином:

Чубань, М. О. Моделі апроксимації поверхні відгуку в оптимізаційних дослідженнях машинобудівних конструкцій / **М. О. Чубань, Р. І. Шейченко, Р. В. Грабов** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях.* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2015. – № 62 (1171). – С. 46 - 51. – ISSN 2079-5459.

АНОТАЦІЯ При точковій апроксимації функції відгуку в ході побудови моделі при виконанні оптимізації машинобудівних конструкцій слід враховувати, що знаходження додаткових точок може бути дорогим з погляду витрат часу і ресурсів. Виходячи з цього, вигідно поетапно використовувати моделі поверхні відгуку різних ступенів точності. Розглянуті та застосовані для тестових задач методи лінійної та білінійної апроксимації. Дана оцінка похибки обох методів на тестових прикладах.

Ключові слова: лінійна апроксимація, білінійна апроксимація, поверхня відгуку, метод скінченних елементів, метод скінченних різниць, машинобудівна конструкція, синтез параметрів.

Поступила (received) 03.12.2015