ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

УДК 539.3 doi:10.20998/2413-4295.2016.12.03

ВЛИЯНИЕ ВАРЬИРУЕМЫХ ИНЕРЦИОННО-ЖЕСТКОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОМАССОВЫХ СИСТЕМ

А. В. ГРАБОВСКИЙ

Кафедра теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, УКРАИНА
email: grabovskiy@tmm-sapr.org

АННОТАЦИЯ *В статье исследуются собственные частоты и соответствующие им собственные формы многомассовой системы. В качестве расчетной была выбрана система с 3мя степенями свободы. Исследования выполняются на основе функции Рэлея. В то же время результаты расчета сравниваются с решением, полученным методом Даламбера. В процессе расчета была выполнена оценка влияния жесткости всех упругих и массовых элементов. Построены зависимости решений от изменения входных параметров, выполнен анализ результатов.*
Ключевые слова: *Свободные колебания, динамическая система, собственные частоты, собственные формы колебаний, функция Рэлея, чувствительность.*

THE EFFECT OF VARIABLE INERTIA-STIFFNESS PARAMETERS ON DYNAMIC MULTI-MASS SYSTEMS

A. GRABOVSKIY

Department theory and systems of automated design of mechanisms and machines, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov, UKRAINE
email: grabovskiy@tmm-sapr.org

ABSTRACT *The article investigates the natural frequencies and the corresponding mode shapes multimass own system. The review, which shows the current situation in the field of study of free oscillations using Rayleigh method. In the above operation was calculated as the chosen system with 3 degrees of freedom. A mathematical apparatus for the study of the dynamic characteristics of dynamic multibody systems. Research carried out in an analytical form based on the Rayleigh function with the Maple. At the same time, the calculation results are compared with the solution obtained by d'Alembert. The results are presented in the form of a surface in three-dimensional space, which describes the function of the Rayleigh solutions to such figure are orthogonal to each other. It also provides cross-section of the figure in the sections, in which the minimum of the function (1st natural frequency), a saddle point (2nd natural frequency) and a maximum function (third natural frequency) in the polar coordinate system. By varying the stiffness characteristics of the inertial-changing spectrum of natural frequencies and natural modes. This represents the interests of the development of methods of operational analysis of the reaction spectrum of the natural vibration frequencies and their own forms of vibrations to such variation. This was shown in the presented article. They were built according to decisions on the change of the input parameters. The analysis of the results. The paper also set goals for further research.*
Keywords*: Free vibration analysis, dynamic system, eigen mode, Rayleigh function, sensitivity*

Введение

Как известно [1], основными динамическими характеристиками многомассовых механических систем является спектр собственных частот колебаний и набор собственных форм колебаний.

Многие авторы и в настоящее время исследуют спектр собственных частот и собственных форм колебаний с использованием различных методов. Например, в работе [2] авторы исследуют указанные характеристики для прямоугольных пластин с использованием функций Бесселя. А в работе [3] исследуются динамические характеристики стержней с функционально-зависимым материалом. Другие авторы [4] также применяют метод Рэлея-Ритца для исследования колебаний прямоугольных пластин с вырезами. Также встречаются работы, в которых авторы используют метод Рэлея-Ритца, чтобы получить динамическую модель для анализа свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки [5]. Метод Рэлея-Ритца также используется для определения характеристик расположения упругой точки опоры, чтобы получить минимальную жесткость на второй частоте незакрепленной прямоугольной пластины, которая обычно представляет собой верхний предел первой частоты при одном закреплении [6]. Особенностью решения таких задач является то, что оно имеет периодическое решение [7].

Однако в литературе не встречаются работы, в которых авторы управляют собственными формами системы для улучшения динамических характеристик машиностроительных конструкций.

При варьировании инерционно-жесткостных характеристик (ИЖХ) изменяется и спектр собственных частот колебаний, и собственные формы

© А. В. ГРАБОВСКИЙ, 2016

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

колебаний. В связи с этим представляет интерес разработка методов оперативного анализа реакции спектра собственных частот колебаний и собственных форм колебаний на такое варьирование. Это составляет цель данной статьи

Постановка задачи

В ряде работ [8] для анализа чувствительности собственных частот колебаний динамической системы на варьирование ее инерционно-жесткостных характеристик предложен способ линеаризации поверхности отклика по т.н. «реперным» решениям. Они представляют собой точные решения задачи об определении собственных частот колебаний при конечном варьировании инерционно-жесткостных характеристик. В работах [9, 10] этот подход распространен и на собственные формы колебаний.

В данной работе на примере многомассовой динамической системы линейной структуры (рис. 1) описан подход, алгоритмы и установлены особенности изменения собственных частот колебаний и собственных форм колебаний при варьировании инерционно-жесткосных характеристик.

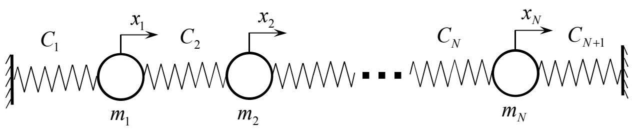

Рис. 1 – Многомассовая динамическая система

Методика исследования

Рассматриваемая система описывается при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$m_i\ddot{x}_i + C_i(x_i - x_{i-1}) + C_{i+1}(x_i - x_{i+1}) = 0\,; \quad x_0 \equiv 0\,;\ x_{N+1} \equiv 0\,;\ i = 1,\ldots,N\,. \tag{1}$$

Т.о., если (1) представить в виде

$$M\ddot{X} + CX = 0\,;\ X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}^T\,, \tag{2}$$

то в (2) фигурирует диагональная матрица масс:

$$M = diag(m_i) \tag{3}$$

и трехдиогональная матрица жесткости

$$C = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2) & -C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 & (C_2 + C_3) & -C_3 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & -C_i & (C_i + C_{i+1}) & -C_{i+1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_N & (C_N + C_{N+1}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Для частного решения такой системы

$$x = \lambda \sin(\omega t) \tag{5}$$

можно получить систему уравнений для определения собственных частот колебаний и собственных форм колебаний:

$$Det(C - \omega^2 M) = 0\,;\ (C - \omega^2 M)\lambda = 0\,. \tag{6}$$

Для решения (6), т.е. определения собственных частот колебаний ω_i и соответствующих форм λ_i, можно использовать либо методы линейной алгебры [11], либо метод с использованием функции Рэлея:

$$\omega_k^2 = \min R = \min \frac{\sum C_{ij}\lambda_{ki}\lambda_{kj}}{\sum m_{ij}\lambda_{ki}\lambda_{kj}}\,,\ k, i, j = 1,\ldots,N\,. \tag{7}$$

В (7) ищется минимум R на псевдосфере $\sum \lambda_{ij}^2 = 1$, а затем – условные минимумы, на которых $\lambda_{se}^{(j)}$, нормальны всем предыдущим их наборам λ_{mn}, $m = 1,\ldots,(s-1)$.

В работе с применением и первого, и второго способа предлагается определять собственные частоты колебаний и собственные формы колебаний, причем отличительной способностью является способ задания степени варьирования инерционно-жесткостных характеристик. Так, предлагается элементы матрицы масс и жесткостей изменять с использованием параметров q и r:

$$m_i(q_i) = m_{0i}tgq_i\,, \tag{8}$$

$$C_i(r_i) = C_{0i}tgr_i\,, \tag{9}$$

где параметры с индексами « $_0$ » соответствуют номинальным значениям инерционно-жесткостных характеристик, а параметры $q, r \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Тогда, введя в рассмотрение безразмерные характеристики

$$\overline{\omega}_i(q, r) = arctg\left[\omega_i(q, r) \Big/ \omega_i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{9}$$

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

$$\overline{\lambda}_{ij}(q,r) = arctg\left[\lambda_{ij}(q,r) \Big/ \lambda_{ij}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\right], \quad (10)$$

можно путем изменения всех компонент массивов $q = \{q_1,\ldots,q_N\}^T$, $r = \{r_1,\ldots,r_N\}^T$ в интервале $q,r \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ охватить все множество возможных сочетаний инерционно-жесткостных характеристик, а массивы параметров $\overline{\omega} = \{\overline{\omega}_1,\ldots,\overline{\omega}_N\}^T$ и $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_{ij})$ отразят степень реакции динамической системы на варьирование инерционно-жесткостных характеристик.

Численные результаты.

Оба предложенных способа анализа собственных частот колебаний и собственных форм колебаний многомассовой системы на варьирование ее динамических характеристик получили программную реализацию в среде Maple. В качестве исходных данных фигурируют: число степеней свободы N системы; массы m_{i0} и жесткости C_{i0}, а также наборы q, r (или интервалы изменения). На выходе – параметры ω_{i0}, λ_{ij0} для системы с номинальными параметрами и массивы $\overline{\omega}$, $\overline{\lambda}$.

На рис. 2 - 8 представлены результаты решения ряда задач с линейным варьированием инерционно-жесткостных характеристик в окрестности их номинальных значений:

$$m_i = m_{i0}(1+\alpha_i), \quad (11)$$

$$C_i = C_{i0}(1+\beta_i). \quad (12)$$

Имеется ввиду, что на рис. 2 – 8 функция R и ее сечения представлены в своих главных координатах.

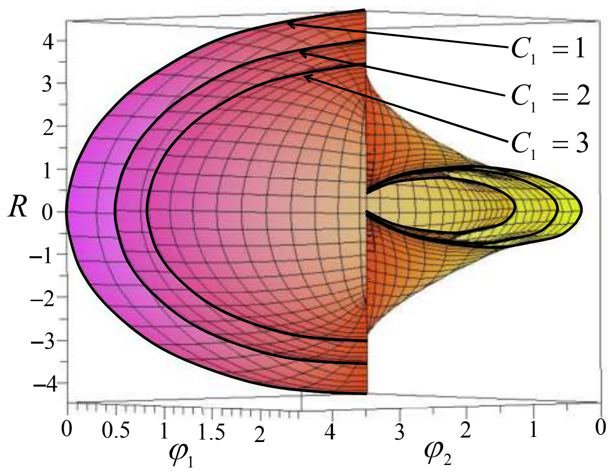

Рис. 2 – Внешний вид функции R при варьировании жесткости 1й пружины
1) $\beta_1 = 0$; 2) $\beta_2 = 1$; 3) $\beta_3 = 2$.

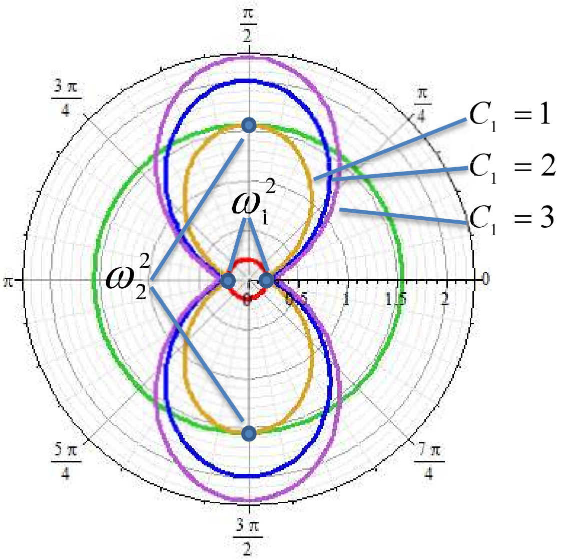

Рис. 3 – Изменение характерного сечения в плоскости ω_1, ω_2 3х мерной фигуры при варьировании жесткости 1й пружины

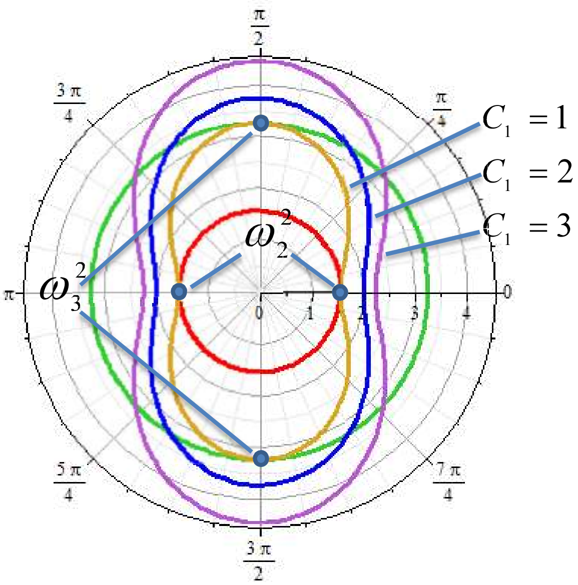

Рис. 4 – Изменение характерного сечения в плоскости ω_2, ω_3 3х мерной фигуры при варьировании жесткости 1й пружины

На рис. 3 - 8 отражены характерные трансформации сечений функции Рэлея при варьировании параметров q, r.

Анализ полученных результатов свидетельствует, с одной стороны, о достаточно существенном изменении $\overline{\omega}$, $\overline{\lambda}$ при стремлении $q \to 0$, $r \to 0$, $q \to \frac{\pi}{2}$, $r \to \frac{\pi}{2}$, а с другой –

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

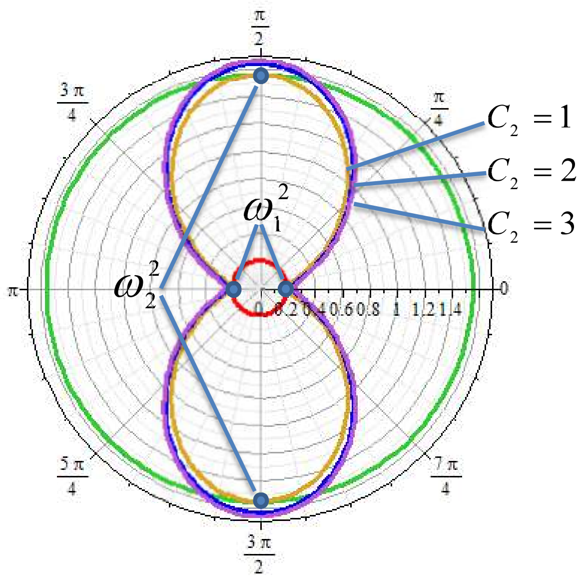

Рис. 5 – Изменение характерного сечения в плоскости ω_1, ω_2 3х мерной фигуры при варьировании жесткости 2й пружины

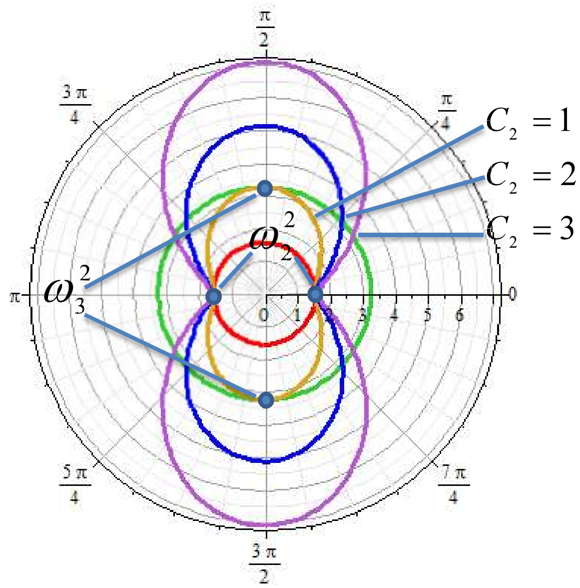

Рис. 6 – Изменение характерного сечения в плоскости ω_2, ω_3 3х мерной фигуры при варьировании жесткости 2й пружины

о практически линейном характере такого изменения в окрестности $q = \frac{\pi}{4}$, $r = \frac{\pi}{4}$.

Выводы

Из полученных результатов можно сделать вывод о применимости линеаризации динамических характеристик многомассовых систем (т.е. их собственных частот колебаний и собственных форм колебаний) в окрестности точки параметрического пространства с номинальным их набором.

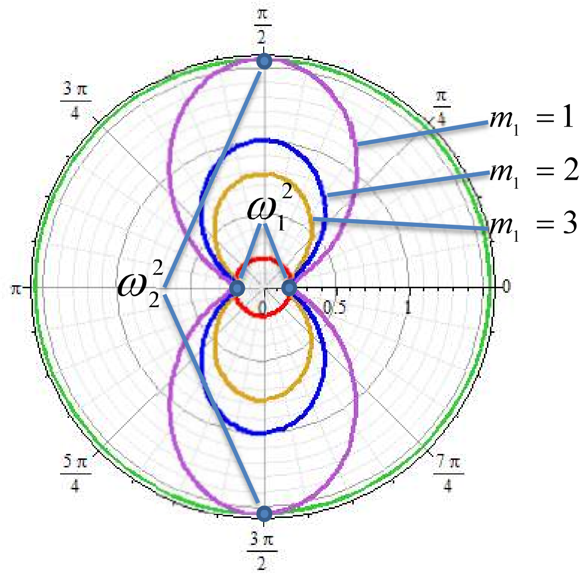

Рис. 7 – Изменение характерного сечения в плоскости ω_1, ω_2 3х мерной фигуры при варьировании жесткости 2й пружины

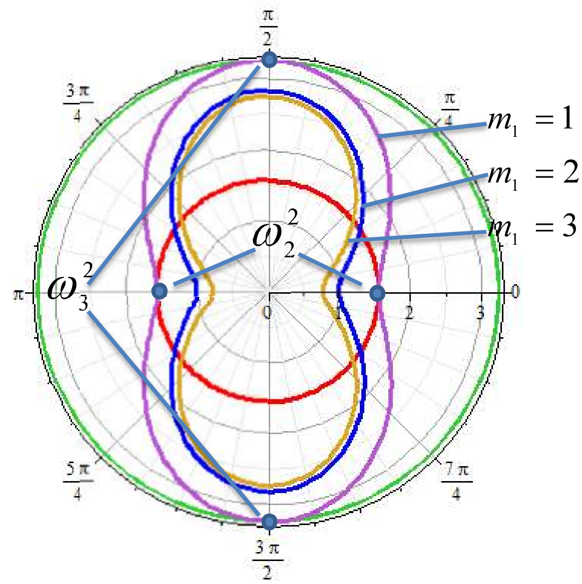

Рис. 8 – Изменение характерного сечения в плоскости ω_2, ω_3 3х мерной фигуры при варьировании жесткости 2й пружины

В дальнейшем планируется применить предложенный подход к стержневой системе и показать, как будут меняться собственные частоты и собственные формы при варьировании инерционно-жесткостных характеристик такой системы.

Список литературы

1 **Бабаков, И. М.** Теория колебаний: учебное Пособие / **И. М. Бабаков**. – М.: Дрофа. – 2004. – 591 с.

2 **Chakraverty, S.** Free vibration of non-uniform nanobeams using Rayleigh-Ritz method / **S. Chakraverty, Laxmi Behera** // *World Journal of Mechanics*. – 2012. – 2. – P. 297-310. – doi:10.4236/wjm.2012.26036.

3 **Liu, A. Q.** Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions / **A. Q. Liu, H. L. Chen** // *Journal of Applied Mechanics*. – 2007. – 74. – P. 1247-1251. – doi:10.1115/1.2744043.

4 **O'Boy, D. J.** Vibration of a rectangular plate with a central power-law profiled groove by the Rayleigh-Ritz method / **D. J. O'Boy, V.V. Krylov** // *Applied Acoustics*. – 2016. –104. – P. 24-32. – doi:10.17028/rd.lboro.2005377.v1.

5 **HyunWook Lee** Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh-Ritz method and comparison of different shell theories / **HyunWook Lee, Moon K.** // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Volume 353. – P. 344-377. – doi:10.1016/j.jsv.2015.05.028.

6 **Wang, D.** Minimum stiffness location of point support for control of fundamental natural frequency of rectangular plate by Rayleigh–Ritz method / **D. Wang, Z. C. Yang, Z. G. Yu** // *Journal of Sound and Vibration*. – 2010. – Volume 329. – P. 2792-2808. – doi:10.1016/j.jsv.2010.01.034.

7 **Yaqiong Li** New results of periodic solutions for forced Rayleigh-type equations / **Yaqiong Li, Lihong Huang** // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. – 2008. – Volume 221. – P. 98-105, doi:10.1016/j.cam.2007.10.005.

8 **Танченко, А. Ю.** Метод прямого конечного возмущения численных моделей при исследовании динамических, жесткостных и прочностных характеристик тонкостенных элементов машиностроительных конструкций / **А. Ю. Танченко**, **А. В. Литвиненко**, **А. Д. Чепурной**, **Ю. В. Костенко**, **Н. А. Ткачук** // *Вестник Брянского государственного технического университета.* – Брянск. – 2014. – № 4(44). – С. 114-124.

9 **Грабовский, А. В.** Чувствительность собственных форм колебаний систем с несколькими степенями свободы к варьированию параметров динамической системы / **А. В. Грабовский**, **Н. А. Ткачук**, **Н. Н. Ткачук**, **А. Ю. Танченко**, **И. В. Мазур** // *Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Транспортное машиностроение*. – Х.: НТУ «ХПИ». – 2015. – № 43. – С. 25 - 29.

10 **Грабовский, А. В.** Зависимость собственных частот и собственных форм колебаний от инерционно-жесткостных характеристик систем с конечным числом степеней свободы / **А. В. Грабовский** // *Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Новые решения в современных технологиях*. – Х.: НТУ «ХПИ», 2015. – № 46. – С. 11 - 16.

11 **Геворкян, Ю. Л.** Основы линейной алгебры и её приложений в технике: Учебник / **Ю. Л. Геворкян, А. Л. Григорьев**. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2002. – 542 с.

Bibliography (transliterated)

1 **Babakov, I. M.** Teoriya kolebaniy: ucheb. Posobie. [Theory of oscillations: Textbook]. Moskow: Drofa, 2004, 591 p.

2 **Chakraverty, S., Laxmi Behera** Free vibration of non-uniform nanobeams using Rayleigh-Ritz method. *World Journal of Mechanics*. 2012, **2**, 297 - 310. doi:10.4236/wjm.2012.26036.

3 **Liu, A. Q., Chen, H. L.** Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, **74**, 1247 - 1251, doi:10.1115/1.2744043.

4 **O'Boy, D. J., Krylov, V. V.** Vibration of a rectangular plate with a central power-law profiled groove by the Rayleigh–Ritz method, *Applied Acoustics*, 2016, **104**, 24 - 32 doi:10.17028/rd.lboro.2005377.v1.

5 **HyunWook Lee, Moon K.** Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh–Ritz method and comparison of different shell theories. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, **353**, 344-377, doi:10.1016/j.jsv.2015.05.028.

6 **Wang, D., Yang, Z. C., Yu, Z. G.** Minimum stiffness location of point support for control of fundamental natural frequency of rectangular plate by Rayleigh–Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, **329**, 2792 - 2808, doi:10.1016/j.jsv.2010.01.034.

7 **Yaqiong Li, Lihong Huang** New results of periodic solutions for forced Rayleigh-type equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **221**, 98 - 105, doi:10.1016/j.cam.2007.10.005.

8 **Tanchenko, A. Yu. Litvinenko**, **A. V., Chepurnoy**, **A. D., Kostenko**, **Yu.V., Tkachuk, N. A.** Metod pryamogo konechnogo vozmushcheniya chislennykh modeley pri issledovanii dinamicheskikh, zhestkostnykh i prochnostnykh kharakteristik tonkostennykh elementov mashinostroitel-nykh konstruktsiy. [The method of direct perturbation of the final numerical models in the study of dynamic, stiffness and strength properties of thin-walled elements of machine construction]. *Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. Brynsk, 2014, **4**(44), 114 - 124.

9 **Grabovskiy, A. V., Tkachuk, N. A.**, **Tkachuk**, **N. N., Tanchenko**, **A. Yu., Mazur, I. V.** Chuvstvitel'nost' sobstvennykh form kolebaniy sistem s neskol'kimi stepenyami svobody k var'irovaniyu parametrov dinamicheskoy sistemy. [The sensitivity of the natural modes of systems with several degrees of freedom to variations in the parameters of the dynamic system]. *Bulletin of NTU «KhPI». Seriya: Transportnoe mashinostroenie. – Kharkiv: NTU «KhPI»*, 2015, **43**, 25 - 29.

10 **Grabovskiy, A. V.** Zavisimost' sobstvennykh chastot i sobstvennykh form kolebaniy ot inertsionno-zhestkostnykh kharakteristik sistem s konechnym chislom stepeney svobody. [The dependence of natural frequencies and natural modes of inertial stiffness characteristics of systems with a finite number of degrees of freedom]. *Bulletin of NTU «KhPI». Seriya: Novye resheniya v sovremennykh tekhnologiyakh. – Kharkiv: NTU «KhPI»*, 2015, **46**, 11 - 16.

11 **Gevorkyan, Yu. L., Grigor'yev, A. L.** Osnovy lineynoy algebry i ee prilozheniy v tekhnike: Uchebnik. [Basics of linear algebra and its applications in engineering: Textbook]. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2002, 542 p.

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

Сведения об авторах (About authors)

Грабовский Андрей Владимирович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, кафедра теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков, Украина; e-mail: grabovskiy@tmm-sapr.org.

Andrey Grabovskiy – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Senior Researcher, Department theory and systems of automated design of mechanisms and machines, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov, Ukraine, *e-mail: grabovskiy@tmm-sapr.org.*

Пожалуйста ссылайтесь на эту статью следующим образом:

Грабовский, А. В. Влияние варьируемых инерционно-жесткостных параметров на характеристики динамических многомассовых систем / **А. В. Грабовский** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Новые решения в современных технологиях*. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2016. – № 12 (1184). – С. 17-22, doi:10.20998/2413-4295.2016.12.03.

Please cite this article as:

Grabovskiy, A. The effect of variable inertia-stiffness parameters on dynamic multi-mass systems. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016, **12** (1184), 17-22. – doi:10.20998/2413-4295.2016.12.03.

Будь ласка посилайтесь на цю статтю наступним чином:

Грабовський, А. В. Вплив варійованих інерційно-жорсткістних параметрів на характеристики динамічних багатомасових систем / **А. В. Грабовський** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2016. – № 12 (1184). – С. 17-22. – doi:10.20998/2413-4295.2016.12.03.

АНОТАЦІЯ *У статті досліджуються власні частоти і відповідні їм власні форми багатомасової системи. В якості розрахункової була обрана система з 3мя ступенями свободи. Дослідження виконуються на основі функції Релея. У той же час результати розрахунку порівнюються з рішенням, отриманим методом Даламбера. У процесі розрахунку була виконана оцінка впливу жорсткості всіх пружних і масових елементів. Побудовано залежності рішень від зміни вхідних параметрів, виконаний аналіз результатів.*

Ключові слова: *Вільні коливання, динамічна система, власні частоти, власні форми коливань, функція Релея, чутливість.*

Поступила (received) 17.03.2016