УДК 004.932.72 doi:10.20998/2413-4295.2016.25.22

ОЦЕНКА ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ОБЪЕКТОВ НА ЦИФРОВОМ КАДРЕ ДЛЯ ДЛИННОФОКУСНЫХ И КОРОТКОФОКУСНЫХ ТЕЛЕСКОПОВ

А. В. ПОГОРЕЛОВ[1*], В. Е. САВАНЕВИЧ[2]

[1] Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, УКРАИНА
[2] Ужгородский национальный университет, Ужгород, УКРАИНА
**email: pogartem@rambler.ru*

АННОТАЦИЯ *В статье разработаны вычислительные методы определения экваториальных координат небесных объектов по оценке их положения на цифровом кадре. Разработанные методы учитывают особенности астрономической редукции в длиннофокусных и короткофокусных оптических системах. Для каждой из них проведен сравнительный анализ точности положения объектов в случае применения рассмотренных методов. Результаты анализа показали обоснованность применения методов прямой координатной редукции для кадров, полученных с использованием длиннофокусных оптических систем, и обратной для кадров из короткофокусных оптических систем.*
Ключевые слова: *цифровой кадр, небесный объект, астрономические наблюдения, оценка показателей точности, оптические системы, астроредукция*

ASSESSMENT OF OBJECTS EQUATORIAL COORDINATES ON THE DIGITAL FRAMES FOR LONG-FOCUS AND SHORT-FOCUS TELESCOPES

A. POHORELOV[1*], V. SAVANEVYCH[2]

[1] Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, UKRAINE
[2] Uzhhorod National University, Uzhhorod, UKRAINE

ABSTRACT *Computational methods for determining equatorial coordinates of celestial objects based on an assessment of their positions on the digital frame are described. These methods are based on the possibility of representing errors in celestial objects positions mappings in the form of reduction equation which depends only on the object's location in the frame. To assess the coefficients of the reduction model the modified Levenberg-Marquardt algorithm was used that allowed to eliminate the problem with accumulation of computational errors for ill-conditioned matrix of reduction model partial derivatives. The developed methods take into account the peculiarities of astronomical reduction in long-focus and short-focus optical systems. These systems have different types of optical aberrations that negatively affect accuracy of objects positions determination that leads to the problem of choosing optimal model for each one. With using of digital images obtained from both types of optical systems the comparative analysis of the accuracy of the position of objects in case of application of considered methods have been carried out. As the investigated objects in the analysis the set of reference stars as well as stars identified with UCAC4 have been used. The results showed reasonableness of applying direct coordinate reduction methods for frames obtained by using long-focus optical systems. According to the analysis results for short-focus optical systems it is advisable to use the reverse coordinate reduction methods.*
Keywords*: digital frame, celestial object, astronomical observations, assessment of accuracy metric, optical systems, astroreduction*

Введение

Основная часть астрономических данных получается с использованием автоматизированных астрономических систем. Эти данные получаются с определенными характеристиками. Они включают в себя фокусное расстояние, полосу спектра и параметры сенсора. В зависимости от используемого фокусного расстояния, можно разделить оптические системы на короткофокусные и длиннофокусные [1].

Этим системам свойственны разные типы оптических аберраций, которые негативно влияют на качество изображений [2] и передаточные характеристики оптических систем. Поэтому для точных астрономических измерений (астрометрии, фотометрии) на всём поле зрения телескопа очень важно проводить астрономическую редукцию с учетом особенностей используемой оптической системы.

Анализ литературы

В работах [3÷5] рассматриваются методы оценки параметров местоположения объектов на цифровых изображениях. Представленные методы позволяют оценить положение объектов с учетом наклонной помеховой подложки. Результаты ряда экспериментов по анализу точности оценки местоположения объектов приведены в работах [3, 6]. Однако, методики оценки экваториальных координат по полученным параметрам объекта на цифровом изображении представлены не были.

Вопросы оценки экваториальных координат объектов поднимаются в работе [7]. Одним из основных недостатков данной работы является то, что

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

рассматриваемый метод не учитывает особенностей оптических систем телескопов с разным фокусным расстоянием. В рамках проведенных исследований представлена зависимость среднеквадратической оценки экваториальных координат и количества отождествленных звезд от модели постоянных пластинок. В тоже время, методики получения результатов не были подробно изложены. Так же к недостаткам данной работы можно отнести использование в качестве опорного звездного каталога USNOB1.0 [8], который по своей точности уступает используемому в данной работе каталогу UCAC4 [9].

Цель работы

Целью статьи является разработка вычислительных методов определения экваториальных координат объектов по оценке их положения на цифровом кадре, приблизительных экваториальных координатах оптического центра кадра, а так же достаточного количества опорных звезд.

Постановка задачи

Результаты наблюдений телескопа [1] отображены на цифровом кадре [2]. С использованием специальных методов измерены положения объектов [7] на цифровом кадре и отобраны опорные звезды [10]. Известны их координаты в системе координат цифрового кадра и яркость соответствующих им изображений. В используемом опорном звездном каталоге найдены соответствующие им объекты.

Для произвольно выбранной звезды S, известны её экваториальные координаты (α, δ) [11]. Из заголовка цифрового кадра получена информация о приблизительных экваториальных координатах его центра (α_0, δ_0). В связи с влиянием атмосферы [12], а так же искажениями [13, 14, 15], вносимыми оптической системой телескопа, координаты звезды (x, y) в системе координат цифрового кадра [2] не совпадают с идеальными координатами (ξ, η), полученными по формулам центральной проекции [17]. При этом предполагается, что ошибки в отображении положения небесных объектов на цифровом кадре используемого телескопа возможно учесть в форме редукционного уравнения [18], зависящего только от расположения объекта на кадре.

На основании рассмотренных исходных данных необходимо оценить экваториальные координаты объектов. Разрабатываемый метод должен учитывать особенности длиннофокусных и короткофокусных оптических систем.

Прямая модель редукции

Идеальные координаты i-го небесного объекта на цифровом кадре можно получить [18] согласно формулам сферической тригонометрии по его экваториальным координатам (α_i, δ_i) и с использованием известных экваториальных координат оптического центра кадра (α_0, δ_0):

$$\begin{cases} \xi_i = \dfrac{\cos\delta_i \sin(\alpha_i - \alpha_0)}{\sin\delta_i \sin\delta_0 + \cos\delta_i \cos\delta_0 \cos(\alpha_i - \alpha_0)}; \\ \eta_i = \dfrac{\sin\delta_i \cos\delta_0 - \cos\delta_i \sin\delta_0 \cos(\alpha_i - \alpha_0)}{\sin\delta_i \sin\delta_0 + \cos\delta_i \cos\delta_0 \cos(\alpha_i - \alpha_0)}. \end{cases}, \quad (1)$$

Аналогично можно получить экваториальные координаты точки с известными идеальными координатами [18,19]:

$$\begin{cases} \alpha_i = \alpha_0 + arctg\left(\dfrac{-\xi_i}{\cos\delta_0 - \eta_i \sin\delta_0}\right); \\ \delta_i = \arcsin\dfrac{\eta_i \cos\delta_0 + \sin\delta_0}{\sqrt{1+\xi_i^2+\eta_i^2}}. \end{cases} \quad (2)$$

В общем случае система координат цифрового кадра отличается от идеальной (из-за абберации телескопа) [20], поэтому необходимо преобразовать полученные координаты в систему координат телескопа, с учетом ее отличия от идеальной. Между плоскими идеальными и сферическими экваториальными координатами существует однозначное соответствие, которое выражается формулами (1), (2). Таким образом, задача определения экваториальных координат объекта при известных его прямоугольных координатах в системе координат цифрового кадра можно свести к оценке зависимости между координатами объектов в двух прямоугольных системах координат (СК): СК кадра (x, y) и идеальной СК (ξ, η).

Первоначально, из априорных соображений, задается вид этой модели. В простейшем случае, рассматриваемая модель сводится к линейному преобразованию [21]:

$$\begin{cases} \xi_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i; \\ \eta_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i. \end{cases} \quad (3)$$

Коэффициенты системы уравнений (3) задают зависимость между идеальной системой координат и системой координат цифрового кадра. Поэтому выражение (3) называют уравнением связи. В рамках астрометрии для их обозначения широко используется термин «постоянные пластинки» [11]. Впервые термин появился во времена применения в астрометрии фотографических пластинок. Несмотря на прекращение их использования, термин сохранился, и в наши дни употребляется для обозначения коэффициентов редукционных уравнений цифровых кадров [22].

Известными величинами в системе уравнений (3) являются идеальные (ξ_i, η_i) и прямоугольные (x_i, y_i) координаты *i*-й опорной звезды. Требуется найти вектор коэффициентов постоянных пластинок:

$$\theta = \{\theta_x, \theta_y\}, \tag{4}$$

в котором:

$$\theta_x = \{a_0, a_1, \dots a_p\}, \tag{5}$$

$$\theta_y = \{b_0, b_1, \dots b_p\}, \tag{6}$$

где p – количество используемых коэффициентов.

Однако модель (3) имеет ряд недостатков. Прежде всего, она применима только к телескопам с небольшим полем зрения (не более 20 угловых минут) или с использованием небольших участков поля зрения телескопа. Наличие только линейных членов делают её чувствительной к любым искажениям изображения. По этим причинам применение приведенной модели целесообразно только в случае определения координат объекта, находящегося в центре кадра.

Для определения координат на всем кадре иногда используют квадратичную модель [7]:

$$\xi_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2; \tag{7}$$

$$\eta_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 x_i^2 + b_4 x_i y_i + b_5 y_i^2; \tag{8}$$

Чаще используют модели и более высоких порядков, например, кубическую [7]:

Оценка среднего отклонения оценок экваториальных координат объектов в l-том сегменте определялось согласно выражениям:

$$\xi_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2 + a_6 x_i^3 + a_7 x_i^2 y_i + a_8 x_i y_i^2 + a_9 y_i^3; \tag{9}$$

$$\eta_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 x_i^2 + b_4 x_i y_i + b_5 y_i^2 + b_6 x_i^3 + b_7 x_i^2 y_i + b_8 x_i y_i^2 + b_9 y_i^3. \tag{10}$$

или модель с полиномом пятой степени:

$$\begin{aligned}\xi_i &= a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2 + a_6 x_i^3 + \\ &+ a_7 x_i^2 y_i + a_8 x_i y_i^2 + a_9 y_i^3 + a_{10} x_i^4 + a_{11} x_i^3 y_i + \\ &+ a_{12} x_i^2 y_i^2 + a_{13} x_i y_i^3 + a_{14} y_i^4 + a_{15} x_i^5 + a_{16} x_i^4 y_i + \\ &+ a_{17} x_i^3 y_i^2 + a_{18} x_i^2 y_i^3 + a_{19} x_i y_i^4 + a_{20} y_i^5;\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\xi_i &= b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 x_i^2 + b_4 x_i y_i + b_5 y_i^2 + b_6 x_i^3 + \\ &+ b_7 x_i^2 y_i + b_8 x_i y_i^2 + b_9 y_i^3 + b_{10} x_i^4 + b_{11} x_i^3 y_i + \\ &+ b_{12} x_i^2 y_i^2 + b_{13} x_i y_i^3 + b_{14} y_i^4 + b_{15} x_i^5 + b_{16} x_i^4 y_i + \\ &+ b_{17} x_i^3 y_i^2 + b_{18} x_i^2 y_i^3 + b_{19} x_i y_i^4 + b_{20} y_i^5.\end{aligned} \tag{12}$$

Для определения коэффициентов постоянных пластинок достаточно наличия шести (квадратичная), десяти (кубическая) или двадцати одной (модель с полиномом пятой степени) опорных звезд (количество уравнений определяется количеством неизвестных). Однако наличие ошибок снижает точность полученных коэффициентов. Поэтому для их вычисления выбирают существенно избыточную совокупность опорных звезд [10] и для каждой звезды записывают такую пару уравнений, а затем решают полученную избыточную систему уравнений метода наименьших квадратов (МНК) [23]:

$$\begin{cases} \xi_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1 y_1 + a_5 y_1^2 + \\ + a_6 x_1^3 + a_7 x_1^2 y_1 + a_8 x_1 y_1^2 + a_9 y_1^3; \\ \vdots \\ \xi_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2 + \\ + a_6 x_i^3 + a_7 x_i^2 y_i + a_8 x_i y_i^2 + a_9 y_i^3; \\ \vdots \\ \xi_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 y_n + a_3 x_n^2 + a_4 x_n y_n + a_5 y_n^2 + \\ + a_6 x_n^3 + a_7 x_n^2 y_n + a_8 x_n y_n^2 + a_9 y_n^3. \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \eta_1 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 x_1^2 + b_4 x_1 y_1 + b_5 y_1^2 + \\ + b_6 x_1^3 + b_7 x_1^2 y_1 + b_8 x_1 y_1^2 + b_9 y_1^3; \\ \vdots \\ \eta_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 x_i^2 + b_4 x_i y_i + b_5 y_i^2 + \\ + b_6 x_i^3 + b_7 x_i^2 y_i + b_8 x_i y_i^2 + b_9 y_i^3; \\ \vdots \\ \eta_n = b_0 + b_1 x_n + b_2 y_n + b_3 x_n^2 + b_4 x_n y_n + b_5 y_n^2 + \\ + b_6 x_n^3 + b_7 x_n^2 y_n + b_8 x_n y_n^2 + b_9 y_n^3. \end{cases} \tag{14}$$

МНК-оценкой коэффициентов модели постоянных пластинок является вектор [21]:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} \left(\tilde{Y} - J_1\theta\right)^T \left(\tilde{Y} - J_1\theta\right), \tag{15}$$

где $\hat{\theta}$ – оценка вектора коэффициентов постоянных пластинки θ (4);

$\tilde{Y} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{N_{ref}})$, $\tilde{Y} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{N\,ref})$ – совокупности соответствующих идеальных координат опорных звезд, рассчитанных по формулам (13), (14);

N_{ref} – количество опорных звезд;

J_1 – матрица Якоби, общая для уравнений (13) и (14).

В общем случае матрица Якоби имеет вид:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\theta_1} & \dots & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\theta_n} & \dots & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\theta_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\xi_i}{\partial\theta_1} & \dots & \dfrac{\partial\xi_i}{\partial\theta_n} & \dots & \dfrac{\partial\xi_i}{\partial\theta_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\xi_{N_{ref}}}{\partial\theta_1} & \dots & \dfrac{\partial\xi_{N\,ref}}{\partial\theta_n} & \dots & \dfrac{\partial\xi_{N\,ref}}{\partial\theta_p} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Матрица Якоби (16) J составляется из частных производных оценки идеальных координат (11), (12) по вектору коэффициентов постоянных пластинок (4). При этом i-й строке матрицы Якоби J соответствует

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

значение производных по всем оцениваемым параметрам по отклонению в i-ом измерении, а n-й столбец матрицы содержит производные по n-му параметру вектора оцениваемых параметров θ в каждом измерении. Другими словами, in-й элемент матрицы Якоби представляет собой производную оценки идеальной координаты в i-ом измерении по n-му параметру вектора оцениваемых параметров θ (4).

Матрица Якоби для квадратичной модели может быть представлена выражением:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial\theta_1} & \dots & \frac{\partial\xi_1}{\partial\theta_n} & \dots & \frac{\partial\xi_1}{\partial\theta_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\xi_i}{\partial\theta_1} & \dots & \frac{\partial\xi_i}{\partial\theta_n} & \dots & \frac{\partial\xi_i}{\partial\theta_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\xi_{N_{ref}}}{\partial\theta_1} & \dots & \frac{\partial\xi_{N\,ref}}{\partial\theta_n} & \dots & \frac{\partial\xi_{N\,ref}}{\partial\theta_p} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

В свою очередь, матрица Якоби для кубической модели имеет вид:

$$J_1^T = \begin{Vmatrix} 1 & ... & 1 & ... & 1 \\ x_1 & ... & x_i & ... & x_{N_{ref}} \\ y_1 & ... & y_i & ... & y_{N_{ref}} \\ x_1^2 & ... & x_i^2 & ... & x_{N_{ref}}^2 \\ x_1 y_1 & ... & x_i y_i & ... & x_{N_{ref}} y_{N_{ref}} \\ y_1^2 & ... & y_i^2 & ... & y_{N_{ref}}^2 \\ x_1^3 & ... & x_i^3 & ... & x_{N\,ref}^3 \\ x_1^2 y_1 & ... & x_i^2 y_i & ... & x_N^2 y_{N_{ref}} \\ x_1 y_1^2 & ... & x_i y_i^2 & ... & x_{N_{ref}} y_{N_{ref}}^2 \\ y_1^3 & ... & y_i^3 & ... & y_{N_{ref}}^3 \end{Vmatrix}. \quad (18)$$

В случае использования модели с полиномом пятой степени:

$$J_1{}^T = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_i & \dots & x_{N_{ref}} \\ y_1 & \dots & y_i & \dots & y_{N_{ref}} \\ x_1^2 & \dots & x_i^2 & \dots & x_{N_{ref}}^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^5 & \dots & x_i^5 & \dots & x_{N_{ref}}^5 \\ x_1^4 y_1 & \dots & x_i^4 y_i & \dots & x_{N_{ref}}^4 y_{N_{ref}} \\ x_1^3 y_1^2 & \dots & x_i^3 y_i^2 & \dots & x_{N_{ref}}^3 y_{N_{ref}}^2 \\ x_1^2 y_1^3 & \dots & x_i^2 y_i^3 & \dots & x_{N_{ref}}^2 y_{N_{ref}}^3 \\ x_1 y_1^4 & \dots & x_i y_i^4 & \dots & x_{N_{ref}} y_{N_{ref}}^4 \\ y_1^5 & \dots & y_i^5 & \dots & y_{N_{ref}}^5 \end{Vmatrix}. \quad (19)$$

Задача вычисления МНК-оценки сводится к решению системы линей-ных алгебраических уравнений [18]:

$$J^T J\hat{\theta} = J^T \tilde{\Upsilon}, \quad (20)$$

Количество неизвестных в системе уравнений (13), (14) не меньше, чем число уравнений, поэтому эта система имеет по крайней мере одно решение [18].

Если матрица $J^T J$ невырожденна, то система уравнений имеет единственное решение [18]:

$$\hat{\theta} = (J^T J)^{-1} J^T \tilde{\Upsilon}. \quad (21)$$

В случае вырожденности матрицы $J^T J$ решение (21) неприменимо, так как обращение плохо обусловленной матрицы приводит к накоплению вычислительных ошибок [24]. Один из способов решения этой проблемы — QR-разложение [25] матрицы $J^T J$ из (20) с помощью модифицированного алгоритма Грама-Шмидта [25].

Так же МНК оценка может быть найдена с использованием градиентных методов, методов последовательного приближения, или их модификаций, например, алгоритма Левенберга-Марквардта (АЛМ) [25], являющегося комбинацией методов Ньютона и градиентного спуска.

В рамках проведенных исследований использовалась программная реализация алгоритма Левенберга-Марквардта из математического пакета ALGLIB [26]. Выбор библиотеки основан на её кросплатформенности (поддерживает Windows, Linux, Solaris), совместимости с широким спектром компиляторов (C++, C#, FreePascal, Delphi), простоте использования и широком наборе математических функций.

Процесс расчета коэффициентов постоянных пластинок выполняется итерационно, с уточнением на каждой k-ой итерации экваториальных координат центра цифрового кадра (α_{0k}, δ_{0k}) по коэффициентам постоянных пластинок, поученным на предыдущей итерации.

На первом шаге, для каждой опорной звезды, по формуле (1) рассчитываются её идеальные координаты (ξ_i, η_i). По полученным координатам составляются системы уравнений (13) и (14), по всем опорным звездам формируется матрица Якоби (18). С использованием АЛМ, по составленным системам уравнений и матрице Якоби, определяются вектора коэффициентов постоянных пластинок θ_k.

По полученным постоянным пластинки и заданным в СК цифрового кадра координатам оптического центра кадра (x_0, y_0), с использованием формулы кубической модели (9), (10), рассчитывается новый центр кадра в идеальной системе координат (ξ_{0k}, η_{0k}). По формулам (2) определяются его координаты в экваториальной СК (α_{0k}, δ_{0k}).

Итерационный процесс заканчивается при достижении заданного максимального количества итераций N_{iter} (на практике максимальное количество итераций выбирают в диапазоне $N_{iter} = [5 \ldots 10]$), или при выполнения условия:

$$\begin{cases} (\alpha_{0k+1} - \alpha_{0k}) \cdot 3600 < \varepsilon; \\ (\delta_{0k+1} - \delta_{0k}) \cdot 3600 < \varepsilon, \end{cases}. \quad (22)$$

где ε – минимально допустимое изменение расчетных значений оптических центров кадров на соседних итерациях для прекращения итерационного процесса, в угловых секундах.

В рамках данной работы предельно допустимое значение параметра задавалось как $\varepsilon = 0.0005$, но в процессе исследований значение не превышало $4 \cdot 10^{-6}$.

По окончанию итерационного процесса, полученные оценки коэффициентов постоянных пластинок $\hat{\theta}$ и значения уточненного оптического центра кадра (ξ_{0_k}, η_{0_k}) можно использовать для определения экваториальных координат объекта по его известным координатам в системе цифрового кадра.

Прямая модель редукции. Обращенная модель преобразования.

В процессе выбора опорных звезд возникает необходимость в определении координат объекта в СК цифрового кадра по его известным экваториальным координатам и постоянным пластинкам. Решение этой задачи в рамках прямой модели редукции проходит в два этапа.

На первом этапе, согласно формуле (1), экваториальные координаты объекта преобразуются в координаты в идеальной системе координат (ξ_i, η_i). По полученным значениям (ξ_i, η_i) и оценке вектора постоянных пластинок $\hat{\theta}$, составляется система уравнений:

$$\begin{cases} \xi_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i y_i + a_5 y_i^2 + a_6 x_i^3 + \\ \quad + a_7 x_i^2 y_i + a_8 x_i y_i^2 + a_9 y_i^3; \\ \eta_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 y_i + b_3 x_i^2 + b_4 x_i y_i + b_5 y_i^2 + b_6 x_i^3 + \\ \quad + b_7 x_i^2 y_i + b_8 x_i y_i^2 + b_9 y_i^3, \end{cases} \quad (23)$$

Матрица Якоби, составленная из частых производных по искомым параметрам, представляется в форме:

$$J = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_i} & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial y_i} \\ \dfrac{\partial \eta_i}{\partial x_i} & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial y_i} \end{Vmatrix}. \quad (24)$$

и блеска небесного объекта

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = a_1 + 2a_3 x_i + a_4 y_i + 3a_6 x_i^2 + 2a_7 x_i y_i + a_8 y^2; \quad (25)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial y_i} = a_2 + a_4 x_i + 2a_5 y_i + a_8 x_i^2 + 2a_7 y_i + 3a_9 y_i^2. \quad (26)$$

Производные $\dfrac{\partial \eta_i}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial \eta_i}{\partial y_i}$ получаются по аналогии с выражениями (25) и (26).

С целью повышения скорости сходимости АЛМ, в качестве начальных приближений используются значение координат (x_{istart}, y_{istart}), полученные из линейной модели постоянных пластинок (3):

$$x_{istart} = \frac{(\xi_i - a_2) \cdot b_1 - (\eta_i - b_2) \cdot a_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0}; \quad (27)$$

$$y_{jstart} = \frac{(\eta_i - b_2) \cdot a_0 - (\xi_i - a_2) \cdot b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}. \quad (28)$$

С использованием модифицированного алгоритма Левенберга -Марквардта, по составленной системе уравнений (23) и матрице Якоби (24) определяются искомые координаты *i*-го объекта в СК цифрового кадра (x_i, y_i).

Обратная модель редукции.

В редукционных уравнениях (15) минимизируется сумма квадратов относительно идеальных координат, то есть предполагается, что основной вклад в ошибку редукции происходит от экваториальных координат в каталоге. Это утверждение верно только для длиннофокусных телескопов – в них из-за малого масштаба поля зрения можно пренебречь погрешностью в измеренных координатах. В диаметрально противоположном случае, когда погрешность измерения существенно больше погрешности каталога, целесообразно применение модели редукции, обратной представленной в (3):

$$\begin{cases} x_i = a_0 + a_1 \xi_i + a_2 \eta_i; \\ y_i = a_0 + a_1 \xi_i + a_2 \eta_i. \end{cases}. \quad (29)$$

Коэффициенты системы уравнений (29) задают зависимость между СК цифрового кадра и идеальной СК. Известными величинами в системе уравнений (29) являются прямоугольные (x_i, y_i) и идеальные (ξ_i, η_i) координаты *i*-й опорной звезды.

Квадратичная модель зависимости координат СК цифрового кадра и идеальной СК принимает следующий вид:

$$x_i = a_0 + a_1 \xi_i + a_2 \eta_i + a_3 \xi_i^2 + a_4 \xi_i \eta_i + a_5 \eta_i^2; \quad (30)$$

$$y_i = b_0 + b_1 \xi_i + b_2 \eta_i + b_3 \xi_i^2 + b_4 \xi_i \eta_i + b_5 \eta_i^2. \quad (31)$$

Кубическая модель постоянных пластинок представляется выражениями:

$$x_i = a_0 + a_1 \xi_i + a_2 \eta_i + a_3 \xi_i^2 + a_4 \xi_i \eta_i + a_5 \eta_i^2 + \\ + a_6 \xi_i^3 + a_7 \xi_i^2 \eta_i + a_8 \xi_i \eta_i^2 + a_9 \eta_i^3 \quad (32)$$

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

$$y_i = b_0 + b_1\xi_i + b_2\eta_i + b_3\xi_i^2 + b_4\xi_i\eta_i + b_5\eta_i^2 + \\ + b_6\xi_i^3 + b_7\xi_i^2 y_i + b_8\xi_i\eta_i^2 + b_9\eta_i^3 \qquad (33)$$

а для модели с полиномом пятой степени, зависимость (29) описывается таким образом:

$$x_i = a_0 + a_1\xi_i + a_2\eta_i + a_3\xi_i^2 + a_4\xi_i\eta_i + a_5\eta_i^2 + a_6\xi_i^3 + \\ + a_7\xi_i^2\eta_i + a_8\xi_i\eta_i^2 + a_9\eta_i^3 + a_{10}\xi_i^4 + a_{11}\xi_i^3\eta_i + \\ + a_{12}\xi_i^2\eta_i^2 + a_{13}\xi_i\eta_i^3 + a_{14}\eta_i^4 + a_{15}\xi_i^5 + a_{16}\xi_i^4\eta_i + \\ + a_{17}x_i^3 y_i^2 + a_{18}x_i^2 y_i^3 + a_{19}x_i y_i^4 + a_{20}y_i^5; \qquad (34)$$

$$y_i = b_0 + b_1\xi_i + b_2\eta_i + b_3\xi_i^2 + b_4\xi_i\eta_i + b_5\eta_i^2 + b_6\xi_i^3 + \\ + b_7\xi_i^2\eta_i + b_8\xi_i\eta_i^2 + b_9\eta_i^3 + b_{10}\xi_i^4 + b_{11}\xi_i^3\eta_i + \\ + b_{12}\xi_i^2\eta_i^2 + b_{13}\xi_i\eta_i^3 + b_{14}\eta_i^4 + b_{15}\xi_i^5 + b_{16}\xi_i^4\eta_i + \\ + b_{17}\xi_i^3\eta_i^2 + b_{18}\xi_i^2\eta_i^3 + b_{19}\xi_i\eta_i^4 + b_{20}\eta_i^5. \qquad (35)$$

Как и в прямой модели редукции, для определения коэффициентов постоянных пластинок выбирают избыточную совокупность опорных звезд, для каждой звезды записывают пару уравнений, а затем решают полученную избыточную МНК-систему уравнений [23]:

$$\begin{cases} x_1 = a_0 + a_1\xi_1 + a_2\eta_1 + a_3\xi_1^2 + a_4\xi_1\eta_1 + a_5\eta_1^2 + \\ + a_6\xi_1^3 + a_7\xi_1^2\eta_1 + a_8\xi_1\eta_1^2 + a_9\eta_1^3; \\ \vdots \\ x_i = a_0 + a_1\xi_i + a_2\eta_i + a_3\xi_i^2 + a_4\xi_i\eta_i + a_5\eta_i^2 + \\ + a_6\xi_i^3 + a_7\xi_i^2\eta_i + a_8\xi_i\eta_i^2 + a_9\eta_i^3; \\ \vdots \\ x_n = a_0 + a_1\xi_n + a_2\eta_n + a_3\xi_n^2 + a_4\xi_n\eta_n + a_5\eta_n^2 + \\ + a_6 x_n^3 + a_7\xi_n^2\eta_n + a_8\xi_n y\eta_n^2 + a_9\eta_n^3. \end{cases} \qquad (36)$$

$$\begin{cases} y_1 = b_0 + b_1\xi_1 + b_2\eta_1 + b_3\xi_1^2 + b_4\xi_1\eta_1 + b_5\eta_1^2 + \\ + b_6\xi_1^3 + b_7\xi_1^2\eta_1 + b_8\xi_1\eta_1^2 + b_9\eta_1^3; \\ \vdots \\ y_i = b_0 + b_1\xi_i + b_2\eta_i + b_3\xi_i^2 + b_4\xi_i\eta_i + b_5\eta_i^2 + \\ + b_6\xi_i^3 + b_7\xi_i^2\eta_i + b_8\xi_i\eta_i^2 + b_9\eta_i^3; \\ \vdots \\ y_n = b_0 + b_1\xi_n + b_2\eta_n + b_3\xi_n^2 + b_4\xi_n\eta_n + b_5\eta_n^2 + \\ + b_6\xi_n^3 + b_7\xi_n^2\eta_n + b_8\xi_n\eta_n^2 + b_9\eta_n^3. \end{cases} \qquad (37)$$

МНК-оценкой коэффициентов модели постоянных пластинок является вектор [18]:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta}\left(\tilde{\mathrm{Y}} - J_2\theta\right)^T\left(\tilde{\mathrm{Y}} - J_2\theta\right), \qquad (38)$$

где $\hat{\theta}$ – оценка вектора коэффициентов постоянных пластинки θ (4);

$\tilde{\mathrm{Y}} = (x_1, x_2, ..., x_{N_{ref}})$, $\tilde{\mathrm{Y}} = (y_1, y_2, ..., y_{N\,ref})$ – совокупности соответствующих прямоугольных координат опорных звезд, определенных по формулам (13), (14);

N_{ref} – количество опорных звезд;

J_2 – матрица Якоби, общая для уравнений (36) и (37).

Матрица Якоби в общем виде для данного случая представляется как:

$$J_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_n} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial\theta_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial\theta_1} & \dots & \dfrac{\partial x_i}{\partial\theta_n} & \dots & \dfrac{\partial x_i}{\partial\theta_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_{N_{ref}}}{\partial\theta_1} & \dots & \dfrac{\partial x_{N\,ref}}{\partial\theta_n} & \dots & \dfrac{\partial x_{N\,ref}}{\partial\theta_p} \end{bmatrix} \qquad (39)$$

Матрица Якоби для квадратичной модели описывается выражением:

$$J_2^T = \begin{Vmatrix} 1 & ... & 1 & ... & 1 \\ \xi_1 & ... & \xi_i & ... & \xi_{N_{ref}} \\ \eta_1 & ... & \eta_i & ... & \eta_{N_{ref}} \\ \xi_1^2 & ... & \xi_i^2 & ... & \xi_{N_{ref}}^2 \\ \xi_1\eta_1 & ... & \xi_i\eta_i & ... & \xi_{N_{ref}}\eta_{N_{ref}} \\ \eta_1^2 & ... & \eta_i^2 & ... & \eta_{N_{ref}}^2 \end{Vmatrix} \qquad (40)$$

Для кубической модели матрица Якоби принимает вид:

$$J_2^T = \begin{Vmatrix} 1 & ... & 1 & ... & 1 \\ \xi_1 & ... & \xi_i & ... & \xi_{N_{ref}} \\ \eta_1 & ... & \eta_i & ... & \eta_{N_{ref}} \\ \xi_1^2 & ... & \xi_i^2 & ... & \xi_{N_{ref}}^2 \\ \xi_1\eta_1 & ... & \xi_i\eta_i & ... & \xi_{N_{ref}}\eta_{N_{ref}} \\ \eta_1^2 & ... & \eta_i^2 & ... & \eta_{N_{ref}}^2 \\ \xi_1^3 & ... & \xi_i^3 & ... & \xi_{N\,ref}^3 \\ \xi_1^2\eta_1 & ... & \xi_i^2\eta_i & ... & \xi_N^2\eta_{N_{ref}} \\ \xi_1\eta_1^2 & ... & \xi_i\eta_i^2 & ... & \xi_{N_{ref}}\eta_{N_{ref}}^2 \\ \eta_1^3 & ... & \eta_i^3 & ... & \eta_{N_{ref}}^3 \end{Vmatrix} \qquad (41)$$

В случае использования модели с полиномом пятой степени:

$$J_2{}^T = \begin{Vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_i & \dots & \xi_{N_{ref}} \\ \eta_1 & \dots & \eta_i & \dots & \eta_{N_{ref}} \\ \xi_1^2 & \dots & \xi_i^2 & \dots & \xi_{N_{ref}}^2 \\ \xi_1\eta_1 & \dots & \xi_i\eta_i & \dots & \xi_{N_{ref}}\eta_{N_{ref}} \\ \eta_1^2 & \dots & \eta_i^2 & \dots & \eta_{N_{ref}}^2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \xi_1^5 & \dots & \xi_i^5 & \dots & \xi_{N_{ref}1}^5 \\ \xi_1^4\eta_1 & \dots & \xi_i^4\eta_i & \dots & \xi_{N_{ref}}^4\eta_{N_{ref}} \\ \xi_1^3\eta_1^2 & \dots & \xi_i^3\eta_i^2 & \dots & \xi_{N_{ref}}^3\eta_{N_{ref}}^2 \\ \xi_1^2\eta_1^3 & \dots & \xi_i^2\eta_i^3 & \dots & \xi_{N_{ref}}^2\eta_{N_{ref}}^3 \\ \xi_1\eta_1^4 & \dots & \xi_i\eta_i^4 & \dots & \xi_{N_{ref}}\eta_{N_{ref}}^4 \\ \eta_1^5 & & \eta_i^5 & & \eta_{N_{ref}}^5 \end{Vmatrix} \qquad (42)$$

Задача вычисления МНК-оценки сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, представленной в (20)

Процесс расчета коэффициентов постоянных пластинок в целом аналогичен рассмотренному для прямой модели редукции. После формирования постоянных пластинок и используя заданные координаты оптического центра кадра (x_0, y_0), составляется система уравнений:

$$\begin{cases} x_i = a_0 + a_1\xi_i + a_2\eta_i + a_3\xi_i^2 + a_4\xi_i\eta_i + a_5\eta_i^2 + a_6\xi_i^3 + \\ + a_7\xi_i^2\eta_i + a_8\xi_i\eta_i^2 + a_9\eta_i^3; \\ y_i = b_0 + b_1\xi_i + b_2\eta_i + b_3\xi_i^2 + b_4\xi_i\eta_i + b_5\eta_i^2 + b_6\xi_i^3 + \\ + b_7\xi_i^2\eta_i + b_8\xi_i\eta_i^2 + b_9\eta_i^3, \end{cases} \quad (43)$$

для которой матрица Якоби имеет вид:

$$J = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_i} & \dfrac{\partial y_i}{\partial \eta_i} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \xi_i} & \dfrac{\partial y_i}{\partial \eta_i} \end{Vmatrix}, \quad (44)$$

где частные производные:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_i} = a_1 + 2a_3\xi_i + a_4\eta_i + 3a_6\xi_i^{\;2} + 2a_7\xi_i\eta_i + a_8\eta^2, \quad (45)$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial \eta_i} = a_2 + a_4\xi_i + 2a_5\eta_i + a_8\xi_i^2 + 2a_7\eta_i + 3a_9\eta_i^2. \quad (46)$$

Полученные в результате решения системы (43) координаты оптического центра цифрового кадра в идеальной СК (ξ_{0k}, η_{0k}), с использованием формул сферической тригонометрии (2), преобразуются в экваториальные координаты (α_{0k}, δ_{0k}). При выполнении условия (22) итерационный процесс заканчивается, а координаты (α_{0k}, δ_{0k}) принимаются как уточненные экваториальные координаты оптического центра кадра (α_0, δ_0).

Полученные оценки коэффициентов постоянных пластинок $\hat{\theta}$ (38) и значения уточненных экваториальных координат оптического центра кадра (ξ_{0_k}, η_{0_k}) можно использовать для определения координат объекта в системе цифрового кадра по его известным экваториальным координатам.

Анализ разработанных методов

Исследования проводились на двух независимых сериях цифровых кадров - полученных с использованием длиннофокусных и короткофокусных оптических систем. В качестве короткофокусного телескопа использовался телескоп Genon обсерватории ISON-Кисловодск (код MPC D00) с фокусным расстоянием $f = 294.76$ мм. Для исследований на длиннофокусной оптической системе использовался VacuumNewton–Telescope (VNT) обсерватории «Vihorlat Observatory in Humenné» с длиной фокуса $f = 8922.71$. Так же в исследовании использовался телескоп САНТЕЛ-400АН обсерватории ISON-NM (код MPC H15), имеющий промежуточное значение фокусного расстояния между двумя предыдущими - $f = 1197.37$.

Исследовались показатели точности определения экваториальных координат как опорных звезд так и все звезд кадра, отождествлённых с каталогом UCAC4 [9].

В качестве показателей точности использовались:

- оценка среднего отклонения оценок экваториальных координат объектов $\hat{\Delta}_{\alpha_{ij(k)}}$, $\hat{\Delta}_{\delta_{ij(k)}}$:

$$\hat{\Delta}_{\alpha_{ij(k)}} = \sum_{i=1}^{N_{obj}} \Delta_{\alpha_{i(k)}} / N_{obj}; \quad (47)$$

$$\hat{\Delta}_{\delta_{ij(k)}} = \sum_{j=1}^{N_{obj}} \Delta_{\delta_{i(k)}} / N_{obj}, \quad (48)$$

где $\Delta_{\alpha_{ij(k)}}$, $\Delta_{\delta_{i(k)}}$ - отклонения между оценками ($\alpha_{i(k)}$, $\delta_{i(k)}$) экваториальных координат i-го измерения кадра и j-го формуляра каталога ($\alpha_{j(k)}$, $\delta_{j(k)}$), составляющих k-ю отождествленную пару($\alpha_{ij(k)}$, $\delta_{ij(k)}$);

N_{obj} - количество отождествленных пар «измерение-формуляр»;

- оценка среднего полного отклонения оценок экваториальных координат объектов и их формулярными значениями $\hat{\Delta}_{\alpha\delta_{ij(k)}}$:

$$\hat{\Delta}_{\alpha\delta_{ij(k)}} = \sum_{i=1}^{N_{obj}} \Delta_{\alpha\delta_{i(k)}} / N_{obj}, \quad (49)$$

где $\Delta_{\alpha\delta_{ij(k)}}$ - полное отклонение между оценками ($\alpha_{i(k)}$, $\delta_{i(k)}$) экваториальных координат i-го объекта и его формулярным значением ($\alpha_{j(k)}$, $\delta_{j(k)}$):

$$\Delta_{\alpha\delta_{ij(k)}} = \arccos(\sin\alpha_{i(k)} \cdot \sin\alpha_{j(k)} + \\ + \cos\alpha_{i(k)} \cdot \cos\alpha_{j(k)} \cdot \cos\Delta_{\delta_{ij(k)}}); \quad (50)$$

- оценка среднеквадратичного отклонения оценок прямого восхождения и склонения σ_α, σ_δ:

$$\sigma_{\alpha_{ij(k)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{obj}} (\Delta_{\alpha_{ij(k)}} - \hat{\Delta}_{\alpha_{ij(k)}})^2 / N_{obj}}; \quad (51)$$

$$\sigma_{\delta_{ij(k)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{obj}} (\Delta_{\delta_{ij(k)}} - \hat{\Delta}_{\delta_{ij(k)}})^2 / N_{obj}}; \quad (52)$$

- квантили [29] модулей отклонений по прямому восхождению и склонению на уровне 0.9 и 0.99.

Исследования проводились с использованием ПО CoLiTec [3, 27, 28], обрабатывались ПО SSOAnSe [29] а их результаты представлены в табл. 1.

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

Таблица 1 - Результаты анализа методов прямой и обратной координатной редукции.

Параметр сравнения	Длиннофокусный телескоп (VNT) $f = 8922.71$ мм		Среднефокусный телескоп (САНТЕЛ-400АН) $f = 1197.37$ мм.		Короткофокусный телескоп (Genon) $f = 294.76$ мм.	
	Прямая редукция	Обратная редукция	Прямая редукция	Обратная редукция	Прямая редукция	Обратная редукция
Опорные звезды						
Выбрано опорных звезд	6510	6701	36046	36048	1497	1497
$\hat{\Delta}_{\alpha\delta} < 0.25$ угл. сек	6506	6698	36044	36046	431	432
σ_α, угл. сек.	0.03	0.03	0.06	0.06	0.25	0.25
σ_δ, угл. сек.	0.03	0.03	0.05	0.05	0.26	0.26
Квантиль 0.9 модуля отклонений по α, угл. сек	0.051	0.051	0.1	0.101	0.400	0.400
Квантиль 0.9 модуля отклонений по δ, угл. сек.	0.054	0.055	0.087	0.087	0.408	0.408
Квантиль 0.99 модуля отклонений по α, угл. сек.	0.06	0.082	0.132	0.132	0.522	0.522
Квантиль 0.99 модуля отклонений по δ, угл. сек	0.065	0.082	0.120	0.120	0.529	0.529
Звезды UCAC4						
Всего звезд UCAC4 на кадрах	16018	16037	90538	90538	8019	8019
$\hat{\Delta}_\alpha$, угл. сек.	0.00	0.00	0.02	0.02	-0.06	-0.06
$\hat{\Delta}_\delta$, угл. сек.	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.2	0.2
σ_α, угл. сек.	0.18	0.18	0.2	0.2	0.57	0.57
σ_δ, угл. сек.	0.16	0.16	0.18	0.18	0.62	0.61
Квантиль 0.9 модуля отклонений по α, угл. сек.	0.360	0.356	0.295	0.295	0.853	0.85
Квантиль 0.9 модуля отклонений по δ, угл. сек.	0.252	0.248	0.22	0.22	0.918	0.918
Квантиль 0.99 модуля отклонений по α, угл. сек.	0.684	0.673	0.587	0.587	1.487	1.483
Квантиль 0.99 модуля отклонений по δ, угл. сек.	0.521	0.509	0.523	0.523	1.875	1.87
Звезды ВК						
Всего звезд ВК на кадрах	60073	60076	939253	939250	123377	123375
$\hat{\Delta}_{\alpha\delta} < 0.25$ угл. сек	47279	47280	592891	592877	78996	78999
σ_α, угл. сек.	0.33	0.33	0.75	0.75	-0.01	-0.01
σ_δ, угл. сек.	0.31	0.3	0.67	0.67	-0.01	-0.01
Квантиль 0.9 модуля отклонений по α, угл. сек	0.713	0.716	1.314	1.314	2.182	2.178
Квантиль 0.9 модуля отклонений по δ, угл. сек.	0.497	0.496	1.16	1.16	2.206	2.206
Квантиль 0.99 модуля отклонений по α, угл. сек.	1.231	1.238	1.994	1.994	4.403	4.406
Квантиль 0.99 модуля отклонений по δ, угл. сек	0.931	0.927	1.877	1.877	4.442	4.442

Выводы

В статье разработаны вычислительные методы определения экваториальных координат небесных объектов по оценке их положения на цифровом кадре. Данные методы основаны на возможности представления ошибок в отображении положения небесных объектов на цифровом кадре в виде редукционного уравнения, зависящего только от расположения объекта на кадре. Рассмотренные методы учитывают особенности короткофокусных и длиннофокусных оптических систем. Для оценки коэффициентов редукционного уравнения использован модифицированный алгоритм Левенберга-Марквардта и его реализация из математического пакета ALGLIB.

Анализ результатов применения разработанных вычислительных методов оценок экваториальных координат небесных объектов проведен на кадрах, полученных с использованием длиннофокусной и короткофокусной оптической системы. В качестве исследуемых объектов были выбраны опорные звезды, а так же звезды, отождествленные с UCAC4.

Результаты проведенного анализа показали, что использование обратной модели редукции дает преимущества в короткофокусных оптических системах. Так, использование обратной модели редукции повысило число опорных звезд с 6510 до 6701. В тоже время, в классе звезд, отождествленных со звездным каталогом UCAC4, снизились квантили модулей отклонений по экваториальным координатам на уровне 0.99. Для длиннофокусных телескопов предпочтительней оказалось применение прямой редукционной модели.

Для дальнейшего повышения точности в обоих видах оптических систем целесообразно сконцентрировать исследования на методах внешней координатной редукции.

Список литературы

1. **George, E. S.** Nobel Lecture: The invention and early history of the CCD / **E. Smith George** // *Reviews of modern physics* – 2010. - 82 (3) – P. 2307–2312.
2. **Andersen, G.** The Telescope: Its History, Technology, and Future / **G. Andersen** // *Princenton University Press* - 2007. – 256 p.
3. **Savanevych, V. E.** A new method based on the subpixel Gaussian model for accurate estimation of asteroid coordinates / **V. E. Savanevych, O. B. Briukhovetskyi, N. S. Sokovikova, M. M. Bezkrovny, I. B. Vavilova, Yu. M. Ivashchenko, L. V. Elenin, S. V. Khlamov, Ia. S. Movsesian, A. M. Dashkova, A. V. Pogorelov** // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. – 2015. – T. 451 (3). – P. 3287-3298. – doi: 10.1093/mnras/stv1124.
4. **Дума, Д. П.** Загальна астрометрія. Навчальний посібник / **Д. П. Дума** – Київ: Наукова думка – 2007. – 600 с.
5. **Соковикова, Н. С.** Оценка координат близких астероидов на ПЗС-изображении / **Н. С. Соковикова, В. Е. Саваневич, М. М. Безкровный, С. В. Хламов** // *Восточно-Европейского журнала передовых технологий*. – 2013. – Т. 4/4(64). – С. 41 – 45.
6. **Безкровный, М. М.** Исследование точности оценки местоположения небесных объектов на ПЗС-кадрах / **М. М. Безкровный В. Е. Саваневич, Н. С. Соковикова, Я. С. Мовсесян, А. В. Погорелов, А. Н. Дашкова, Н. Ю. Дихтярь, А. Б. Брюховецкий, Л. О. Михайлова** // *Восточно-Европейского журнал передовых технологий*. – 2014. – Т. 4/2(70). – С. 16 – 22.
7. **Саваневич, В. Е.** Оценка экваториальных координат астероида по оценкам его координат на CCD-кадре / **В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий, А. М. Кожухов, Е. Н. Диков** // *Системи обробки інформації*. – 2010. – Вип. 6(87). – С. 172 – 179.
8. **Zacharias, N.** Catalog Information and Recomendations, U.S. Naval Observatory / **N. Zacharias, R. Gaume, B. Dorland, S. E. Urban.** [Эл. ресурс]. – Режим доступа: http://ad.usno.navy.mil/star/star_cats_rec.shtml
9. **Zacharias, N.** The fourth US naval observatory CCD astrograph catalog (UCAC4) / **N. Zacharias** // *The Astronomical Journal*. – 2013. – Vol. 145(2). – 44 p. – doi: 10.1088/0004-6256/145/2/44.
10. **Саваневич, В. Е.** Метод формирования внутреннего каталога объектов, неподвижных на серии кадров / **В. Е. Саваневич, Я. С. Мовсесян, Н. Ю. Дихтяр** // *Системи обробки інформації* – 2016. – № 8(145). – С. 44-49.
11. **Robin ,M. G.** Spherical Astronomy / **M. G. Andersen** // *Cambridge University Press* - 1985. – 520 p.
12. **Garrett, J.** Modelling Image Distortions from Atmospheric Turbulence in Wide-Field Astronomical Imaging Systems / **Garrett, John, Steve, En-Hsin, Mallory, Chihway** //. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* – 2011. – 1(9) – P. 1-10.
13. **Martin, R.** Processing of the Astronomical Image Data obtained from UWFC Optical Systems / **R Martin, P. Petr, K. Pavel** // *SPIE Digital Library* – 2008. – Vol. 7076. – P. 1-11. – doi: 10.1117/12.794858.
14. **Максутов, Д. Д**. Астрономическая оптика / **Д. Д. Максутов** – М.: Наука, - 1984. – 272 с.
15. **McLean, I. S.** Electronic Imaging in Astronomy. Detectors and Instrumentation (Second Edition) / **McLean I. S**. – Berlin: Springer-Praxis. – 2008. – 592 p.
16. **Calabretta, M. R.** Representations of celestial coordinates in FITS / **M. R. Calabretta, E. W. Greisen** // *Astronomy& Astrophysics.* – 2002. – Vol. 395. – P. 1077–1122. – doi: 10.1051/0004-6361:20021327.
17. **Киселев, А. А.** Теоретические основания фотографической астрометрии / **А. А. Киселев** – М.: Наука - 1989. – 264 с.
18. **Ермаков, С. М.** Математическая теория оптимального эксперимента / **С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский**. – М.: Наука. – 1987 – 320 с.
19. **Hogg, D. W.** Automated Astrometry / **D. W. Hogg, M. Blanton, D. Lang**. // *Astronomical Data Analysis Software and Systems XVII*, R. W. Argyle, P. S. Bunclark, and J. R. Lewis, eds., ASP Conference Series. – 2008. – Vol. 394. – P. 27–34.
20. **Sasian, M. J.** Introduction to aberrations in optical imaging systems / **Sasian M. J.** – Cambridge University Press - 2013. – 261 p.
21. **Hazewinkel, M.** Encyclopaedia of Mathematics / **M. Hazewinkel** // *Springer Netherlands*. – 2001. – 732 p.
22. **Günter, D. R.** Compendium of Practical Astronomy: Volume 1: Instrumentation and Reduction Techniques / **Günter D. R**. – *Springer Science & Business Media.* - 2012. – 540 p.
23. **Björck, A.** Numerical Methods for Least Squares Problems / **A. Björck** – *Society for Industrial and Applied Mathematics* – 1996. – 408 p.
24. **Predrag, S.** Computing generalized inverse of polynomial matrices by interpolation / **S. Predrag, P. Marko** // Applied mathematics and computation – 2006. – 508 p.
25. **Dax, A.** A modified Gram–Schmidt algorithm with iterative orthogonalization and column pivoting / **A. Dax** // *Linear Algebra and its Applications*. – 2000. – Vol. 310. – P. 25-42. – doi: 10.1016/S0024-3795(00)00022-7.
26. **ALGLib** [Электронный ресурс] – Режим доступа: \WWW/ URL: http://www.alglib.net/ 16.10.2015г.
27. **Саваневич, В. Е.** Программа CoLiTec автоматизированного обнаружения небесных тел со слабым блеском / **В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий, А М. Кожухов, Е. Н. Диков, В. П. Власенко** // *Космічна наука і технологія*. – 2012. – т.18. №1. – С. 39 – 46.
28. **Savanevych, V. E.** Comparative analysis of the positional accuracy of CCD measurements of small bodies in the solar system software CoLiTec and Astrometrica **/ V. E. Savanevych, A. B. Briukhovetskyi, Yu. N. Ivashchenko, I. B. Vavilova, M. M. Bezkrovniy, E. N. Dikov, V. P. Vlasenko, N. S. Sokovikova, Ia. S. Movsesian, N. Yu. Dikhtyar, L. V. Elenin, A. V. Pohorelov, S. V. Khlamov** // *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. – 2015. – T. 31 (6). – P. 302-313. – doi: 10.3103/S0884591315060045.
29. **Безкровный, М. М.** Методы исследования статистических характеристик CCD-измерений положений и блеска объектов солнечной системы / **М. М. Безкровный, А. Н. Дашкова, Н. С. Соковикова,**

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

В. Е. Саваневич, А. Б. Брюховецкий // *Восточно-Европейского журнал передовых технологий*. – 2015. – Т. 2/2(22). – С. 26 – 37. – doi: 10.15587/2312-8372.2015.40820.

Bibliography (transliterated)

1. **George E. S.** Nobel Lecture: The invention and early history of the CCD. *Reviews of modern physics*, 2010, **82** (3), 2307-2312.
2. **Andersen, G.** The Telescope: Its History, Technology, and Future. Princenton University Press, 2007, 256 p.
3. **Savanevych V. E., Briukhovetskyi O. B., Sokovikova N. S., Bezkrovny M. M., Vavilova I. B., Ivashchenko, Yu. M., Elenin L. V., Khlamov S. V., Movsesian Ia. S., Dashkova Ia. S., Pohorelov A. V.** A new method based on the subpixel Gaussian model for accurate estimation of asteroid coordinate. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, **451**(3), 3287-3298, doi: 10.1093/mnras/stv1124.
4. **Duma D. P.** Zahal'na astrometriya [General astrometry]. *Navchal'nyy posibnyk. Kyyiv: Naukova dumka*, 2007, 600 p.
5. **Sokovikova, N. S. Savanevych, V. E., Bezkrovny, M. M., Khlamov, S. V.** Ocenka koordinat blizkih asteroidov na PZS-izobrazhenii [Evaluation coordinates close to asteroids CCD image]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2013, **4/4**(64), 41-45.
6. **Bezkrovny, M. M., Savanevych, V. E., Sokovikova, N. S., Movsesian, Ia. S., Pohorelov, A. V., Dashkova, A. N., Dikhtyar, N. Yu., Briukhovetskyi, A. B., Mihajlova, L. O.** Issledovanie tochnosti ocenki mestopolozhenija nebesnyh ob'ektov na PZS-kadrah [A study evaluating the accuracy of the location of celestial objects on the CCD frames]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2014, **4/2**(70), 16-22.
7. **Savanevych, V. E., Briukhovetskyi, A B., Kozhuhov, A. M, Dikov, E. N.** Ocenka jekvatorial'nyh koordinat asteroida po ocenkam ego koordinat na CCD-kadre [Evaluation of the equatorial coordinates of asteroid it is estimated coordinates on CCD-frame]. *Information processing systems*, 2010, **6**(87), 172-179.
8. **Zacharias, N., Gaume, R., Dorland, B., Urban, S. E.** Catalog Information and Recomendations, U.S. Naval Observatory [Web] http://ad.usno.navy.mil/star/star_cats_rec.html
9. **Zacharias, N.** The fourth US naval observatory CCD astrograph catalog (UCAC4). The Astronomical Journal, 2013, **145**(2), 44 p., doi: 10.1088/0004-6256/145/2/44.
10. **Savanevych, V. E., Movsesian, Ia. S., Dikhtyar, N. Yu.** Metod formirovanija vnutrennego kataloga ob#ektov, nepodvizhnyh na serii kadrov [The method of forming an internal directory objects, fixed on a series of frames]. *Information processing systems*, 2016, **8**(145), 44-49.
11. **Robin, M. G.** Spherical Astronomy. *Cambridge University Press*, 1985, 520 p.
12. **Garrett, John, Steve, En-Hsin, Mallory, Chihway.** Modelling Image Distortions from Atmospheric Turbulence in Wide-Field Astronomical Imaging Systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011, **1**(9), 1-10.
13. **Martin, R., Petr P, Pavel K** Processing of the Astronomical Image Data obtained from UWFC Optical Systems. *SPIE Digital Library*, 2008, **7076**, 1-11, doi: 10.1117/12.794858.
14. **Maksutov, D. D.** Astronomicheskaja optika [Astronomical optics]. *Moscow: Nauka*, 1984, 272 p.
15. **McLean, I. S.** Electronic Imaging in Astronomy. *Detectors and Instrumentation (Second Edition). Springer-Praxis*, 2008, 592 p.
16. **Calabretta, M. R., Greisen E. W.** Representations of celestial coordinates in FITS. Astronomy& Astrophysics, 2002, **39**, 1077-1122, doi: 10.1051/0004-6361:20021327.
17. **Kiselev, A. A.** Teoreticheskie osnovanija fotograficheskoj astrometrii [The theoretical foundation of photographic astrometry], *Moscow: Nauka*, 1989, 264 p.
18. **Ermakov, S. M., Zhigljavskij, A. A.** Matematicheskaja teorija optimal'nogo eksperimenta [The mathematical theory of optimal experiment]. *Moscow: Nauka*, 1987, 320 p.
19. **Hogg, D. W., Blanton, M., Lang, D.** Automated Astrometry. *Astronomical Data Analysis Software and Systems XVII*, R. W. Argyle, P. S. Bunclark, and J. R. Lewis, eds., ASP Conference Series, 2008, **394**, 27-34.
20. **Sasian, M. J.** Introduction to aberrations in optical imaging systems. *Cambridge University Press*, 2013, 261 p.
21. **Hazewinkel, M.** Encyclopaedia of Mathematics. *Springer Netherlands*, 2001, 732 p.
22. **Günter, D. R.** Compendium of Practical Astronomy: Volume 1: Instrumentation and Reduction Techniques. *Springer Science & Business Media*, 2012, 540 p.
23. **Björck, A.** Numerical Methods for Least Squares Problems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1996, 408p.
24. **Predrag, S., Marko, P.** Computing generalized inverse of polynomial matrices by interpolation. *Applied mathematics and computation*, 2006, 508 p.
25. **Dax, A.** A modified Gram–Schmidt algorithm with iterative orthogonalization and column pivoting. Linear Algebra and its Applications, 2000, **310**, 25-42, doi: 10.1016/S0024-3795(00)00022-7.
26. **ALGLib** [Web] http://www.alglib.net
27. **Savanevych, V. E., Briukhovetskyi, V. E., Kozhuhov, A. M., Dikov, E. N., Vlasenko, V. P.** Programma CoLiTec avtomatizirovannogo obnaruzhenija nebesnyh tel so slabym bleskom [Program CoLiTec automated detection of celestial bodies with slight shine]. *Kosmìčna nauka ì tehnologìâ*, 2012, **18**(1), 39-46.
28. **Savanevych, V. E., Briukhovetskyi, A. B., Ivashchenko, Yu. N., Vavilova, I. B., Bezkrovniy, M. M., Dikov, E. N., Vlasenko, V. P., Sokovikova, N. S., Movsesian, Ia. S., Dikhtyar, N. Yu., Elenin, L. V., Pohorelov, A.V., Khlamov, S. V.** Comparative analysis of the positional accuracy of CCD measurements of small bodies in the solar system software CoLiTec and Astrometrica. Kinematics and Physics of Celestial Bodies, 2015, **31**(6), 302-313.
29. **Bezkrovny, M. M., Dashkova, A. N., Sokovikova, N. S., Savanevych, V. E., Briukhovetskyi, A. B.** Metody issledovanija statisticheskih harakteri-stik CCD-izmerenij polozhenij i bleska objektov solnechnoj sistemy [Methods of statistical research-cal characteristics of the CCD-measurement of the provisions and shine solar system objects]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2015, **2/2**(22), 26-37, doi: 10.15587/2312-8372.2015.40820.

Сведения об авторах (About authors)

Погорелов Артём Витальевич – аспирант кафедры Электронных вычислительных машин, Харьковского национального университета радиоэлектроники, г. Харьков, Украина; e-mail: pogartem@rambler.ru

Artem Pohorelov – Postgraduate student, Department of Electronic computer, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine; e-mail: pogartem@rambler.ru

Саваневич Вадим Евгнеьевич – д.т.н., профессор, кафедра информационных управляющих систем и технологий, Ужгородский национальный университет, Ужгород; e-mail: vadym@savanevych.com

Savanevych Vadym – Doctor of Technical Sciences (Sc. D.), Professor, Department of Informative and Operating Systems and Technologies, Uzhhorod National University, Kharkiv, Uzhhorod; e-mail: vadym@savanevych.com

Пожалуйста ссылайтесь на эту статью следующим образом:

Погорелов, А. В. Оценка экваториальных координат объектов на цифровом кадре для длиннофокусных и короткофокусных телескопов / **А. В. Погорелов, В. Е. Саваневич** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Новые решения в современных технологиях*. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2016. – № 25 (1197). – С. 147-157. – doi:10.20998/2413-4295.2016.25.22.

Please cite this article as:

Pohorelov, A. V., Savanevych, V. E. Assessment of objects equatorial coordinates on the digital frames for long-focus and short-focus telescopes. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016, **25** (1197), 147-157, doi:10.20998/2413-4295.2016.25.22.

Будь ласка посилайтесь на цю статтю наступним чином:

Погорелов, А. В. Оцінка екваторіальних координат об'єктів на цифровому кадрі для довгофокусних і короткофокусних телескопів / **А. В. Погорелов, В. Є. Саваневич** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2016. – № 25 (1197). – С. 147-157. – doi:10.20998/2413-4295.2016.25.22.

АНОТАЦІЯ *У статті розглянуті обчислювальні методи визначення екваторіальних координат небесних об'єктів за оцінкою їх положення на цифровому кадрі. Розроблені методи враховують особливості астрономічної редукції у довгофокусних і короткофокусних оптичних системах. Для кожної з них проведено порівняльний аналіз точності положення об'єктів при застосування розглянутих методів. Результати аналізу показали обґрунтованість застосування методів прямої координатної редукції для кадрів, отриманих з використанням довгофокусних оптичних систем і зворотної для кадрів з короткофокусних оптичних систем.*

Ключові слова: *цифровий кадр, небесний об'єкт, астрономічні спостереження, оцінка показників точності, оптичні системи, астроредукція.*

Поступила (received) 09.06.2016