

УДК 539.3:517.988.38:519.6:519.8

doi:10.20998/2413-4295.2016.42.04

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТКЛИКА, АДАПТИРОВАННЫЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТОНКОСТЕННЫХ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

**М. А. БОНДАРЕНКО**

Кафедра «Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, УКРАИНА  
email: marina.bondarenko@tmm-sapr.org

**АННОТАЦИЯ** Учитывая особенности формы поверхностей отклика характеристик напряженного состояния тонкостенных машиностроительных конструкций в случае их нелинейного поведения, разработан подход к решению задачи оптимизации. Он состоит в глобальной аппроксимации рассматриваемой функции квадратичной формой, последующем уменьшении приращений независимых переменных и движении от минимума квадратичной формы, построенной на предыдущем шаге, к минимуму вновь построенной аппроксимации. Недостатком предложенного подхода является то, что найденный оптимум может оказаться локальным экстремумом, если минимизируемая функция имеет полихолмистый характер. Тем не менее, он может быть рекомендован для решения практических задач. Разработанный алгоритм был опробован на ряде тестовых задач и продемонстрировал хорошую сходимость.

**Ключевые слова:** машиностроительная конструкция; нелинейное поведение; оптимизация; поверхность отклика; глобальная аппроксимация; квадратичная форма

## OPTIMIZATION METHODS USING RESPONSE SURFACES ADAPTED TO THE TASKS OF ANALYSIS AND SYNTHESIS OF THIN-WALLED MACHINE STRUCTURES DESIGN PARAMETERS

**M. BONDARENKO**

Department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Kharkiv, UKRAINE  
email: marina.bondarenko@tmm-sapr.org

**ABSTRACT** Response surfaces of being evaluated stress state characteristics of thin-walled structures in the case of nonlinear behavior in many cases are characterized by smooth, gentle slope and presence of a plurality of faintly expressed local extrema. This constitute the main difficulty during optimization. An approach to solving the optimization problem that takes into account these peculiarities of these functions shape is developed. It is in the global approximation of the function by quadratic form founding the Hessian matrix using finite difference method for large increments of the independent variables, equal to the intervals of their variation, the subsequent reducing of the independent variables increments and the movement from the minimum of the quadratic form constructed at the previous step, to the minimum of newly constructed approximation. The disadvantage of this approach is that the founded optimum can be a local extremum in the case when minimized function has poli-hilly character. Nevertheless, it can be recommended for solving practical problems because it may be irrational to seek global optimum of function if the first founded optimum is little different of it. Also, it is not worthwhile to seek a global optimum in the case of improving existing structure, but not the design of new one due to the fact that in this case, the optimum located near the nominal values of variable design parameters is of more interest than the remote optimum. The algorithm was tested on a series of classical test problems and it showed good convergence. By improving this approach, it was proposed to "freeze" the Hessian matrix at several steps of the iterative process. For some of test functions considered this correction has allowed to reduce the number of computational iterations, but with a reduction in accuracy, and for some functions it showed its inapplicability. Thus, in practice the proposed algorithm with using the Hessian matrix update correction should take into account the specificity of the response function in each case.

**Keywords:** machine engineering design; nonlinear behavior; optimization; response surface; a global approximation; quadratic form

### Введение

Поверхности отклика оцениваемых характеристик напряженного состояния тонкостенных конструкций в случае их нелинейного поведения во многих случаях характеризуются гладкостью, пологостью и наличием множества неярко выраженных локальных экстремумов (рис. 1). Эта

особенность данных функций составляет определяющую трудность при оптимизации.

В то же время, процесс оптимизации, нацеленный на решение конкретных практических задач, отличается тем, что для практических нужд важно найти пусть не самое лучшее, но достаточно удачное решение. Именно этот критерий, диктуемый реалиями проектных исследований предлагается

использовать в работе с целью модификации общих подходов создаваемых моделей и применяемых методов.

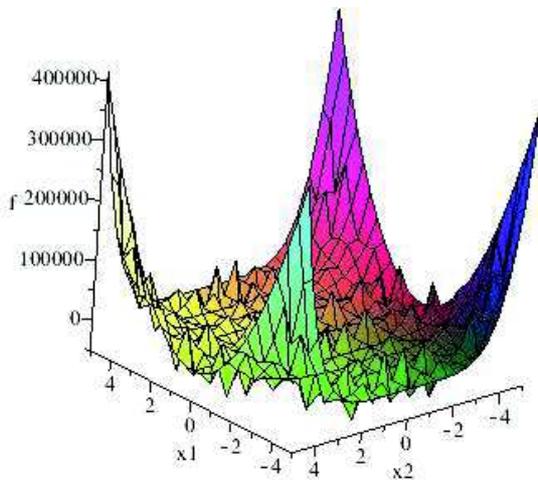


Рис. 1 – Пример, демонстрирующий особенности функций отклика оцениваемых характеристик нелинейных систем

#### Анализ состояния вопроса

Классические методы оптимизации, примененные к этим функциям, имеют низкую эффективность: работают долго и не всегда дают удовлетворительный результат.

В частности, для минимизации функций отклика рассматриваемого типа были задействованы метод нулевого порядка – метод покоординатного спуска – и метод первого порядка – метод покоординатного спуска в комбинации с методом парабол [1, 2].

В методе покоординатного спуска направление минимизации определяется последовательными вычислениями значений функции и сводятся к построению траектории спуска  $\{x_k\}$ , вдоль которой целевая функция убывает:  $f(x_{k+1}) < f(x_k)$  [3]. Согласно данному методу производится раздельная оптимизация по параметрам функции: один из параметров считается изменяемым, а остальные фиксируются при некоторых значениях. Далее изменяемым становится следующий параметр, а предыдущий фиксируется в значении, полученном на предыдущем шаге. Процесс продолжается до окончания перебора всех параметров.

Суть второго из задействованных методов в том, что на каждом шаге покоординатного спуска в текущей точке исходная функция локально аппроксимируется параболоидом. Таким образом, добиваемся возрастания скорости сходимости метода. Условием экстремума в данном случае является равенство нулю первой производной аппроксимирующей функции по всем параметрам. Далее найденное решение подставляется в исходную

функцию, и если она возросла, размер области аппроксимации уменьшается, например, делится пополам.

В результате применения данных методов наблюдается длительный процесс хождения по оврагам функции.

#### Метод решения

Таким образом, в качестве альтернативы предлагается аппроксимировать минимизируемую функцию глобально квадратичной формой

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c, \text{ вычислив матрицу Гессе } (\alpha_{ij}) \text{ при помощи метода конечных разностей [4, 5] по}$$

большим приращениям независимых переменных, равным интервалам их варьирования. Известно, что использование численного метода для нахождения производных вносит погрешность в решение. Но, учитывая, что разрабатываемый подход нацелен на решение практических задач, где принцип взаимосвязи переменной отклика и управляющей переменной не известен, т. е. функция отклика не задана аналитически, его применение является оправданным. Данное описание исходной функции менее точное по сравнению с локальной аппроксимацией. Но главным достоинством предложенного метода является то, что «оптимум» будет найден в любом случае. Далее выполняется деление шагов по независимым переменным пополам и цикл повторяется, пока величина  $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$  будет оставаться больше заданной погрешности.

Также следует отметить, что найденный в результате задействования данного алгоритма оптимум функции может оказаться локальным экстремумом. Но, учитывая особенности форм поверхностей отклика оцениваемых характеристик тонкостенных конструкций в случае их нелинейного поведения, может оказаться нерациональным искать глобальный оптимум функции, если первый найденный немногим от него отличается.

Также не является целесообразным искать глобальный оптимум в случае совершенствования существующей конструкции, а не проектирования новой, ввиду того, что в данном случае оптимум, находящийся в окрестности номинальных значений варьируемых конструктивных параметров, представляет больший интерес, нежели удаленный. Дело в том, что традиционные методы направлены, как правило, на поиск некоторого минимального (максимального) значения в предположении существования такого как четко и резко выделенного. В то же время при решении ряда практических задач получаемые поверхности отклика имеют, как отмечалось выше, полихолмистый характер, причем разница между значениями в соседних минимумах (максимумах) незначительна.

Кроме того, могут встречаться овраги с дном вдоль сложной траектории. Также встречаются изломы и скачки на поверхности отклика.

Таким образом, возникают затруднения при применении методов минимизации разных порядков (нулевого, первого и т. д.). Более того, применение того или иного конкретного метода эффективно только для поверхности отклика того или иного конкретного вида. В связи с этим предлагается применение комплекса методов, эффективных каждый для своего типа поверхностей отклика.

**Решение тестовых задач**

Предложенный алгоритм был опробован на ряде тестовых задач [7, 8]:

1. Задача минимизации функции вида:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^4. \tag{1}$$

Известно, что минимум данной функции находится в точке (0, 0, 0). График функции в случае двух переменных представлен на рис. 2 при изменении значений переменных от -5 до +5. Траектория спуска при задействовании для минимизации предложенного алгоритма приведена на рис. 3.

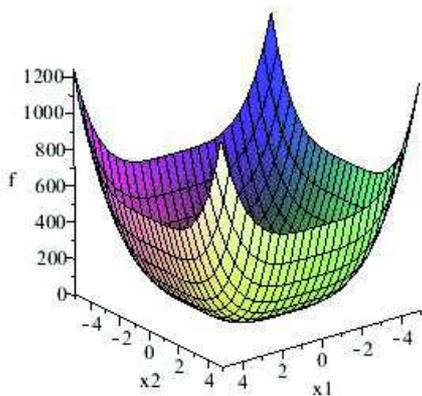


Рис. 2 – Тестовая функция для оценки работоспособности алгоритма минимизации

Таким образом, при заданной точности  $\epsilon = 0.0001$ , приняв за исходную точку (3.33, -3.33, 246.91), решение задачи минимизации (точка (2.04·10<sup>-5</sup>, 2.04·10<sup>-5</sup>, 3.46·10<sup>-19</sup>)) при помощи предложенного алгоритма было получено за 16 шагов.

2. Задача минимизации функции Розенброка, рис. 4 [9], имеет вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - x_i)^2 + 100(x_{i+1} - x_i^2)^2, \tag{2}$$

$$x_i \in [-5.12, 5.12].$$

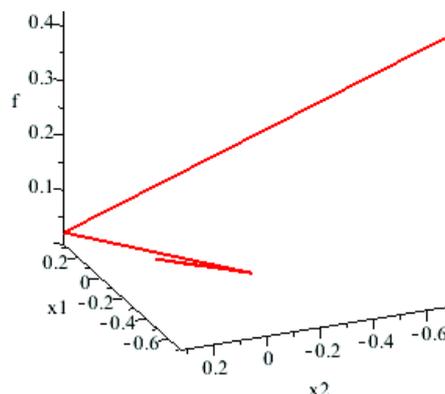


Рис. 3 – Значения функции и ее параметров на разных шагах приближения к минимуму

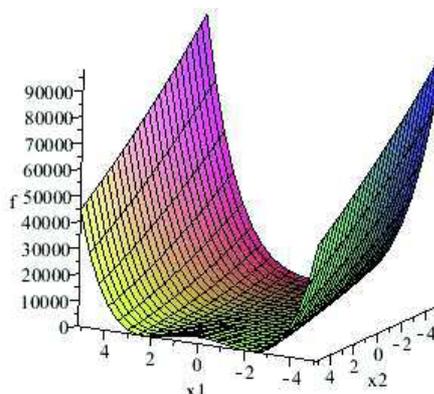


Рис. 4 – График функции Розенброка

Она является классической задачей оптимизации для апробации методов. В случае двух измерений функция создает небольшое плато вокруг низкого холма, с большими крыльями по обеим сторонам. Точка минимума (1, 1, 0) находится на одной стороне холма. С этими особенностями формы функции Розенброка связана трудность поиска ее минимума. При заданной точности  $\epsilon = 10^{-5}$  и нулевого приближения (-2.33, -2, 5553.08), решение задачи минимизации (точка (0.99, 0.99, 2.34·10<sup>-11</sup>)) при задействовании предложенного алгоритма было получено за 16 шагов. Траектория движения к минимуму приведена на рис. 5.

3. Задача минимизации функции Биля [2], рис. 6:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (1.5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2.25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2.625 - x_1(1 - x_2^3))^2, \tag{3}$$

которая рассматривалась на интервалах варьирования независимых переменных  $x_1 \in [-4, 4]$ ,  $x_2 \in [-5, 5]$ . Минимум данной функции находится в точке (3, 0.5, 0) Данную функцию также можно найти среди

классических тестовых задач. Она имеет узкую закругленную впадину, приближающуюся к прямой  $x_2 = 1$ .

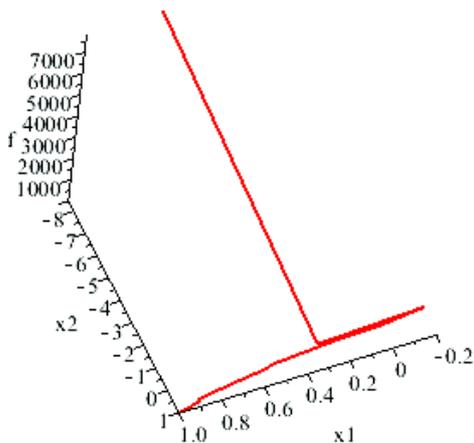


Рис. 5 – Траектория поиска решения

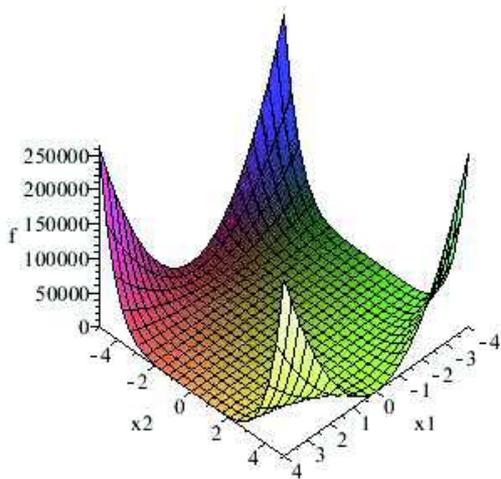


Рис. 6 – График функции Билля

Исходными данными для решения поставленной задачи оптимизации были точность искомого решения  $\varepsilon = 10^{-8}$  и точка начала поиска с координатами  $(0, 0, 14.2)$ . Решение задачи минимизации при задействовании предложенного алгоритма было получено за 33 шага, причем решение с точностью  $\varepsilon = 10^{-5}$  было найдено за 25 шагов, и разница между решениями наблюдается начиная с пятой цифры после запятой, ввиду чего она, как правило, является несущественной в интересующем нас случае оптимизации машиностроительных конструкций. Полученное решение – точка  $(2.82, 0.45, 6.37 \cdot 10^{-3})$ . Траектория движения к минимуму приведена на рис. 7.

4. Минимизация функции Швевеля [10], рис. 8:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n -x_i \cdot \sin(\sqrt{|x_i|}); \quad x_i \in [-500, 500]. \quad (4)$$

Она имеет множество локальных оптимумов, которые располагаются близко друг к другу, поэтому между ними легко «прыгать» по мере удаления от глобального оптимума (точка  $(420.97, 420.97, 837.97)$ ). Также следует отметить, что данную функцию рекомендуется рассматривать в больших диапазонах значений, чем рассмотренные ранее.

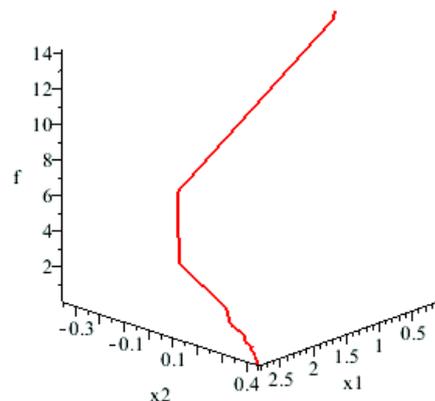


Рис. 7 – Траектория движения к минимуму

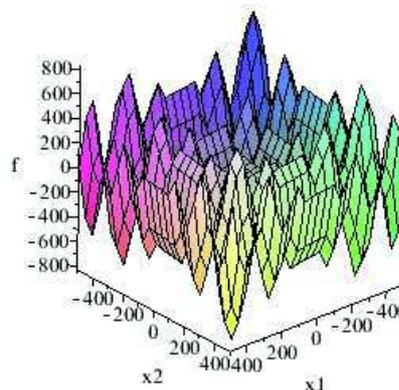


Рис. 8 – График функции Швевеля

При заданной точности  $\varepsilon = 10^{-5}$  из исходной точки  $(500, 500, 361.18)$  глобальный минимум, точка  $(420.97, 420.97, -837.97)$ , при задействовании предложенного алгоритма была найдена за 9 шагов. Траектория поиска минимума приведена на рис. 9.

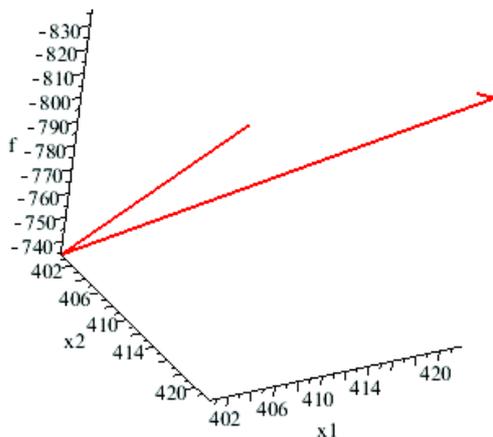


Рис.9 – Траектория движения к минимуму

**Применение разработанного подхода при решении практических задач**

Чтобы смоделировать задачу оптимизации, которая может возникнуть на практике, возьмем за основу, например, функцию Билия (3). Добавим к ней некоторую константу (в данном случае – 100000) для смещения функции по оси *Of*, а также – высокочастотный шум с распределением:  $1000 \cdot \sin(9.42 \cdot x_1) \cdot \sin(31.40 \cdot x_1) \cdot \sin(34.54 \cdot x_2)$ . Получаем новую функцию вида (рис. 10):

$$f(x_1, \dots, x_n) = (1.5 - x_1(1 - x_2))^2 + (2.25 - x_1(1 - x_2^2))^2 + (2.625 - x_1(1 - x_2^3))^2 + 100000 + 1000 \cdot \sin(9.42 \cdot x_1) \cdot \sin(31.40 \cdot x_1) \times \sin(34.54 \cdot x_2). \tag{5}$$

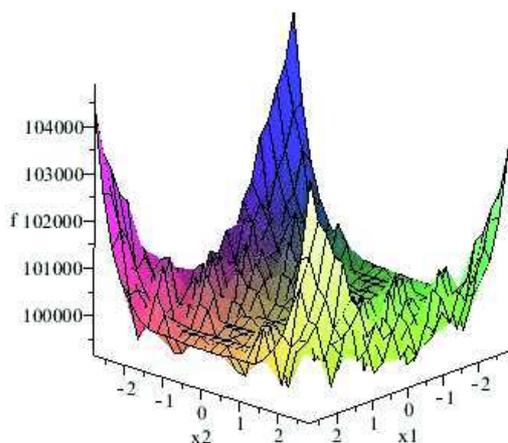


Рис.10 – Модель практической задачи

Траектория движения к минимуму при задействовании предложенного подхода для нахождения оптимальных параметров приведена на рис. 11.

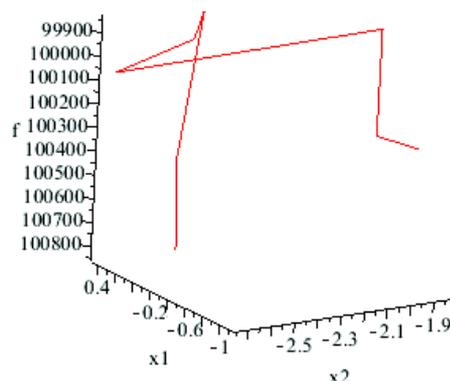
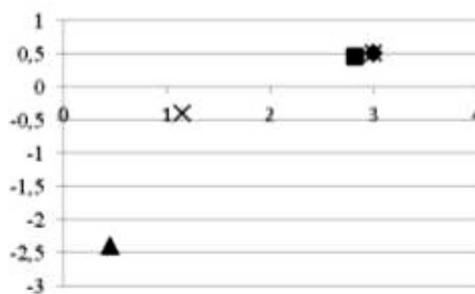


Рис. 11 – Траектория движения к минимуму

Далее сравним полученное сочетание параметров с координатами истинного минимума функции Билия (с учетом подъема ее по оси *Of*), с решением, полученным для предложенной функции с помощью разработанного подхода, а также – с решениями, найденными встроенной функцией минимизации в Maple (рис. 12).



- ✕ Истинный минимум функции Билия
- Минимум функции Билия, найденный при помощи разработанного подхода
- ◆ Минимум функции Билия, найденный встроенной функцией минимизации в Maple
- ▲ Минимум функции с шумом, найденный при помощи разработанного подхода
- ✕ Минимум функции с шумом, найденный встроенной функцией минимизации в Maple

Рис.12 – Координаты  $x_1, x_2$  (см. рис. 11) точек минимума функций, найденные при задействовании различных методов

Значения функций при подстановке в них решений, приведенные к безразмерной величине, представлены на рис. 13.

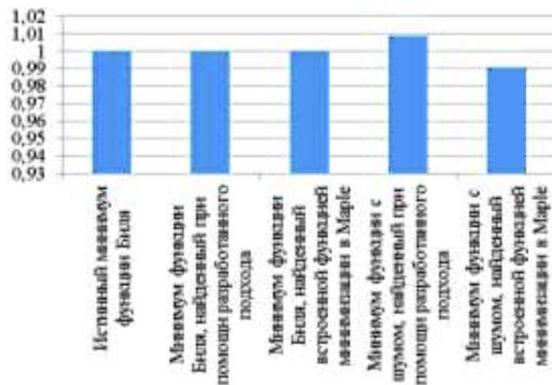


Рис. 13 – Найденные минимальные значения функций, приведенные к безразмерной величине

Таким образом, несмотря на значительное отличие точек локализации минимумов, полученных различными методами, сама минимизируемая функция определяется достаточно точно. В то же время, вычислительные затраты для решения ряда практических задач оптимизации по предложенному в работе методу существенно ниже. Это дает основание для вывода о достаточной его эффективности и применимости для решения некоторых задач.

Таблица 1 – Эффективность предложенного алгоритма при обновлении матрицы Гессе на каждой второй итерации в ходе поиска минимума

Функция	Минимум функции	Пересчет матрицы Гессе на каждой итерации		Пересчет матрицы Гессе на каждой второй итерации	
		Найденный минимум	Количество итераций	Найденный минимум	Количество итераций
$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^4$	(0, 0, 0)	( $2.04 \cdot 10^{-5}$ , $2.04 \cdot 10^{-5}$ , $3.46 \cdot 10^{-19}$ )	16	( $9.28 \cdot 10^{-5}$ , $9.28 \cdot 10^{-5}$ , $1.48 \cdot 10^{-16}$ )	14
Функция Розенброка	(1, 1, 0)	(0.99, 0.99, $2.34 \cdot 10^{-11}$ )	16	(66942.71, $-1.31 \cdot 10^{-8}$ , $2.13 \cdot 10^{21}$ )	12
Функция Били	(3, 0.5, 0)	(2.82, 0.45, $6.37 \cdot 10^{-3}$ )	25	(2.81, 0.45, $7.25 \cdot 10^{-3}$ )	27
Функция Швевеля	(420.97, 420.97, -837.97)	(420.97, 420.97, -837.97)	7	(65.55, 65.55, -127.27)	13

### Выводы

Таким образом, предложен подход к решению задач анализа и синтеза конструктивных параметров тонкостенных машиностроительных конструкций в случае их нелинейного поведения, учитывающий особенности формы поверхностей отклика характеристик напряженного состояния. Исследования по оценке работоспособности разработанного алгоритма на примере тестовых задач оптимизации позволили сделать вывод о его сходимости и точности. Результаты исследований являются обоснованием применимости данного алгоритма для ряда практических задач.

### Список литературы

- 1 **Nocedal, J.** Numerical Optimization. – 2nd ed. / **J. Nocedal, S. Wright.** – New York: Springer-Verlag. – 2006. – 664 p. – doi: 10.1007/978-0-387-40065-5.
- 2 **Химмельблау, Д.** Прикладное нелинейное программирование. Пер. с англ. / **Д. Химмельблау** – М.: Мир. – 1975. – 536 с.
- 3 **Васильев, Ф. П.** Методы оптимизации / **Ф. П. Васильев** – М.: «Факториал Пресс». – 2002. – 824 с.
- 4 **Ильин, В. П.** Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений / **В. П. Ильин** – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. – 2000. – 345 с.

- 5 **Mazumder, S.** Numerical Methods for Partial Differential Equations: Finite Difference and Finite Volume Methods / **S. Mazumder** / *Academic Press*. – 2015. – 484 p.
- 6 **Rassias, T.** Optimization in Science and Engineering: In Honor of the 60th Birthday of Panos M. Pardalos / **T. Rassias, C. A. Floudas, S. Butenko**. – *New York: Springer*, 2014. – 610 p. – doi: 10.1007/978-1-4939-0808-0.
- 7 **Jamil, M.** A literature survey of benchmark functions for global optimization problems / **M. Jamil, X-Sh Yang** // *Int. Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation* – 2013. – Vol. 4, No. 2. – P. 150–194. – doi: 10.1504/IJMMNO.2013.055204.
- 8 **Molga, M.** Test Functions for Optimization Needs / **Marcin Molga, Czeslaw Smutnicki**. – 2005. – [Web] <http://www.zsd.ict.pwr.wroc.pl/files/docs/functions.pdf>.
- 9 **Rosenbrock, H. H.** An automatic method for finding the greatest or least value of a function. / **H. H. Rosenbrock** // *The Computer Journal*. – 1960. – No 3 (3). – P. 175–184. – doi: 10.1093/comjnl/3.3.175.
- 10 **Schweifel, H. P.** Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie / **Hans-Paul Schweifel**. – *Birkhauser*. – 1977. – 370 p. – doi:10.1002/zamm.19800600516.
- 2 **Himmelblau, D.** Prikladnoe nelineynoe programmirovaniye. Per. s angl. *Moscow: Mir*, 1975, 536 p.
- 3 **Vasilev, F. P.** Metodyi optimizatsii. *Moscow: «Faktorial Press»*, 2002, 824 p.
- 4 **Ilin, V. P.** Metodyi konechnykh raznostey i konechnykh ob'emov dlya ellipticheskikh uravneniy. *Novosibirsk: Izd-vo In-ta matematiki*, 2000, 345 p.
- 5 **Mazumder, S.** Numerical Methods for Partial Differential Equations: Finite Difference and Finite Volume Methods. *Academic Press*, 2015, 484 p.
- 6 **Rassias, T., Floudas, C. A., Butenko, S.** Optimization in Science and Engineering: In Honor of the 60th Birthday of Panos M. Pardalos. *New York: Springer*, 2014, 610 p., doi: 10.1007/978-1-4939-0808-0.
- 7 **Jamil, M., Yang, X. Sh.** A literature survey of benchmark functions for global optimization problems. *Int. Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*. 2013, 4(2), 150–194, doi: 10.1504/IJMMNO.2013.055204.
- 8 **Molga, M., Czeslaw Smutnicki** Test Functions for Optimization Needs, 2005, [Web] <http://www.zsd.ict.pwr.wroc.pl/files/docs/functions.pdf>.
- 9 **Rosenbrock, H. H.** An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *The Computer Journal*, 1960, 3 (3), 175–184, doi: 10.1093/comjnl/3.3.175.
- 10 **Schweifel, H. P.** Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie. *Birkhauser*, 1977, 370 p., doi: 10.1002/zamm.19800600516.

#### Bibliography (transliterated)

- 1 **Nocedal, J., Wright, S.** Numerical Optimization. 2nd ed. *New York: Springer-Verlag*, 2006, 664 p., doi:10.1007/978-0-387-40065-5.

#### Сведения об авторах (About authors)

**Бондаренко Марина Александровна** – аспирант каф. «Теория и системы автоматизированного проектирования механизмов и машин», Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина; e-mail: marina.bondarenko@tmm-sapr.org.

**Bondarenko Maryna** – postgraduate student at the Department "The theory and computer aided design of mechanisms and machines", National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine, e-mail: marina.bondarenko@tmm-sapr.org.

*Пожалуйста ссылаетесь на эту статью следующим образом:*

**Бондаренко, М. А.** Методы оптимизации с применением поверхностей отклика, адаптированные к решению задач анализа и синтеза конструктивных параметров тонкостенных машиностроительных конструкций / **М. А. Бондаренко** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Новые решения в современных технологиях*. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2016. – № 42 (1214). – С. 22–28. – doi:10.20998/2413-4295.2016.42.04.

*Please cite this article as:*

**Bondarenko, M.** Optimization methods using response surfaces adapted to the tasks of analysis and synthesis of thin-walled machine structures design parameters. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016, 42 (1214), 22–28, doi:10.20998/2413-4295.2016.42.04.

*Будь ласка посилайтеся на цю статтю наступним чином:*

**Бондаренко, М. О.** Методи оптимізації із застосуванням поверхонь відгуку, адаптовані до розв'язання задач аналізу та синтезу конструктивних параметрів тонкостінних машинобудівних конструкцій / **М. О. Бондаренко** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2016. – № 42 (1214). – С. 22–28. – doi:10.20998/2413-4295.2016.42.04.

**АНОТАЦІЯ** З огляду на особливості форми поверхонь відгуку характеристик напруженого стану тонкостінних машинобудівних конструкцій у разі їх нелінійної поведінки, розроблений підхід до розв'язання задачі оптимізації. Він полягає в глобальній апроксимації даної функції квадратичною формою, подальшому зменшенні прирощень незалежних змінних і русі від мінімуму квадратичної форми, побудованої на попередньому кроці, до мінімуму нової апроксимації. Недоліком запропонованого підходу є те, що знайдений оптимум може виявитися локальним екстремумом, якщо функція, що мінімізується, має полі-горбистий характер. Проте, він може бути рекомендований для розв'язання практичних задач. Розроблений алгоритм був випробуваний на ряді класичних тестових задач і продемонстрував хорошу збіжність.

**Ключові слова:** машинобудівна конструкція; нелінійна поведінка; оптимізація; поверхня відгуку; глобальна апроксимація; квадратична форма

Поступила (received) 03.11.2016