

УДК 519.16:004.021

doi:10.20998/2413-4295.2017.23.18

## ПОБУДОВА ТЕХНОЛОГІЧНОЇ МАТРИЦІ ВАРІАНТІВ ЛІНІЙНОГО РОЗКРОЮ

Г. М. КОДОЛА<sup>1\*</sup>, Б. Є. РОГОЗА<sup>2</sup>

<sup>1</sup> кафедра інформаційних систем, Українського державного хіміко-технологічного університету, Дніпро, УКРАЇНА

<sup>2</sup> кафедра інформаційних систем, Українського державного хіміко-технологічного університету, Дніпро, УКРАЇНА

\*email:galina\_kodola@udhtu.edu.ua

**АНОТАЦІЯ** В статті розглянутий комбінаторний алгоритм розрахунку раціональних варіантів лінійного розкрою матеріалів для побудови технологічної матриці варіантів розкрою малої та середньої розмірності. Наведені приклади розрахунків за алгоритмом

**Ключові слова:** лінійний розрій; технологічна матриця; алгоритм; варіант розкрою.

## CONSTRUCTION A TECHNOLOGICAL MATRIX OF VARIANTS LINEAR CUTTING

G. KODOLA<sup>1\*</sup>, B. ROGOZA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Information Control Systems and Technology, The Ukrainian State Chemical-Technological University, Dnipro, UKRAINE

<sup>2</sup> Information Control Systems and Technology, The Ukrainian State Chemical-Technological University, Dnipro, UKRAINE

**ABSTRACT** The problem of linear cutting is found in many areas of industry: mechanical engineering, metallurgy, wood processing and garment industry, pulp and paper industry and others. Optimal cutting minimizes waste production, so this topic is relevant. The task of minimizing the waste production of cutting is preceded by the task of setting the maximum number of rational variants of cutting materials. The complexity of the problem, namely, the dimension of the cutting matrix and the number of variables for further optimization, is directly determined by the number of rational variants of cutting considered in the model. In the article a combinatorial algorithm for calculating rational variants of linear cutting of materials for constructing a technological matrix of small and medium dimension nesting variants is considered. The generating function for calculation the number of variants types of the cutting is used. The definition of all variants of cutting in the three-dimensional case is reduced to the search for all integer points of space near the plane constructed on the basis of the Diophantine equation. A block diagram of the algorithm for constructing the technological matrix of cutting in a general form is given. Numerical examples are considered. Carried out researches and computer calculations have shown that with a significant increase in the number of species parts that need to cut out the calculation card cutting increases geometrical progression law.

**Keywords:** line cutting; technological matrix; algorithm; variant of cutting.

### Вступ

Задачі лінійного розкрою матеріалів виникають в багатьох галузях промисловості: машинобудуванні, металургії, деревообробній та швейній промисловості, целюлозно-паперовій промисловості та ін. Оптимальний розрій матеріалів дозволяє мінімізувати відходи виробництва, тому цій темі присвячені численні дослідження [1–3]. Близькою задачею до розкрою є задача лінійного пакування, яка виникає в різних галузях, зокрема в інформаційних системах [4].

Питання класифікації задач раціонального розкрою і пакування, були розглянуті в роботах [5–7]. В роботі [8] приведений огляд методів розв'язування класичних задач розкрою-пакування.

В роботі [9] розглянутий метод точної квадратичної регуляризації (EQR) розв'язку даного класу задач показав переваги для вирішення задач великої розмірності.

Постановка задачі лінійного розкрою матеріалів передбачає: маються вихідні заготівлі заданого розміру  $L$ , які необхідно розкроїти на

$m$  деталей заданої довжини  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . Відома потреба  $b_1, b_2, \dots, b_m$  в заготівках відповідної довжини. Для математичної постановки задачі необхідно визначити технологічну матрицю варіантів розкрою («карта розкрою») вихідної заготівлі на деталі заданої довжини. Дана матриця породжує матрицю  $A$ , де елемент  $a_{ij}$  означає кількість заготівках  $i$ -го виду, при  $j$ -тої технології розкрою. Пов'язуємо з кожною технологією позитивну цілу змінну  $x_j$ , яка показує скільки раз  $i$ -та технологія розкрою використовувалась. Для кожної технології розкрою визначим вектор залишків  $c$ . Тоді задача оптимального розкрою полягає в наступному:

Знайти

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i \mid \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j, \right. \\ \left. \forall j = 1, \dots, m, x_i \geq 0, \text{ цілі} \right\}, \quad (1)$$

що дозволяє мінімізувати залишки розкрою.

Вирішенню задачі (1) передує робота по встановленню варіантів розкрою матеріалу. Оскільки

кількістю включених в модель варіантів безпосередньо визначається розмір матриці задачі і число змінних величин.

**Ціль роботи**

Розробити алгоритм, який дозволить сформуванню технологічну матрицю варіантів розкрою вихідної заготовки заданого розміру  $L$  на  $m$  видів деталей заданої довжини  $q_1, q_2, \dots, q_m$ .

**Викладення основного матеріалу**

На рис. 1 представлено варіанти розкрою вихідної заготовки на деталі заданої довжини.

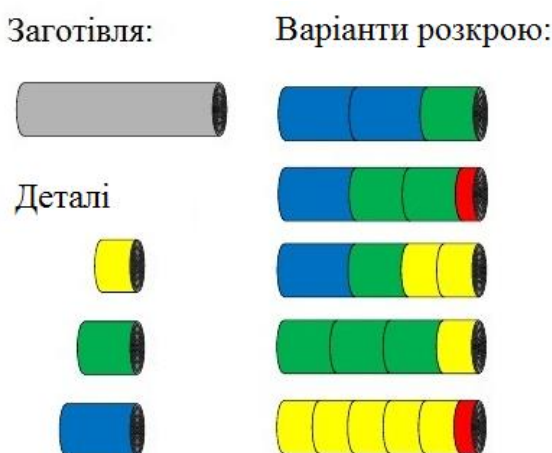


Рисунок 1– Формування варіантів розкрою

Для пошуку шуканого максимального набору варіантів розкрою необхідно організувати перебір всіх допустимих розкроїв. Але при великих значеннях  $m$  повний перебір є практично нерозв'язною задачею. У зв'язку з цим застосовують різні процеси обмеженого перебору. В окремих випадках це просто достроково перервний процес, тоді вектор  $a_i$  не обов'язково забезпечує мінімум функції (1) і отриманий розкрій є лише близьким к оптимальному (раціональний). В інших випадках організують цілеспрямований обмежений перебір, який забезпечує мінімум функції (1) за певну кількість кроків [2].

Доцільно заздалегідь виключити з розгляду явно нераціональні способи з настільки великим відходом, що вони майже напевно не увійдуть в оптимальний план.

Під великим відходом будемо розуміти, залишок заготовки після розкрою, який перевищує або дорівнює довжині мінімальної деталі, що повинні отримати. На такий крок доводиться йти свідомо, інакше число варіантів зросло б у багато разів.

Розглянемо алгоритм побудови технологічної матриці варіантів розкрою («карти розкрою»)

вихідної заготовки на деталі заданої довжини, який оснований на наступному жадному алгоритмі [10]:

Алгоритм

1. Відсортувати довжини деталей

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m$$

2. Розкроїти заготовку на максимальну кількість деталей 1-го виду:

$$a_{11} = \left\lfloor \frac{L}{q_1} \right\rfloor, i = 1$$

3. Обчислити довжину залишку матеріалу

$$y_1 = L \bmod q_1,$$

4. Перевірити довжину залишку

$$0 \leq y_i < q_m$$

якщо виконується умова, то перейти на шаг 5, інакше перейти на шаг 7.

5. Якщо  $i < m$ ,

$$a_{i1} = 0,$$

тобто усіх інших деталей при даній технології буде 0.

6. Перейти на шаг 11.

7.  $i = i + 1$ , тобто перейти до деталі наступного виду

8. Залишок заготовки розкроїти на деталі  $i$ -го виду

$$a_{i1} = \left\lfloor \frac{y_{i-1}}{q_i} \right\rfloor$$

9. Обчислити довжину залишку матеріалу

$$y_i = y_{i-1} \bmod q_i,$$

Перейти на шаг 4.

11. Кінець. Отримана технологія розкрою.

Розглянемо приклад формування технології розкрою, використовуючи представлений алгоритм.

Приклад 1. Маємо заготовку довжиною 21, яку необхідно розкроїти на деталі довжиною 2, 12 та 4.

Дотримуючись алгоритму, відсортуємо довжини деталей в порядку убавання, тобто отримаємо наступну послідовність довжин деталей: 12, 4, 2.

Розкроїмо заготовку на деталі довжиною 12. Таких деталей вийде одна штука. Залишок від заготовки, рівний 9, більший від значення довжини мінімальної деталі, тому переходимо на сьомий крок алгоритму і використовуємо даний залишок для розкрою деталей довжиною 4. Таких деталей вийде 2

штуки із залишком заготовки рівним 1, якого не вистачить для виготовлення деталей іншого виду, тобто виконується умова на четвертому кроці і переходимо на крок п'ять. Так як при побудові даної технології були розглянуті в повному обсязі не всі види деталей, то їх кількість встановлюємо рівним 0. Відповідно, отримали наступну технологію розкрою заготовки довжиною 21 на деталі довжиною 12, 4, 2.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Даний алгоритм дозволяє отримати технологію розкрою вихідної заготовки тільки одного виду.

Для апріорного підрахунку кількості варіантів видів розкрою, використаємо математичний підрахунок, оснований на задачі про розмін [11].

Переформулюємо задачу про розмін до задачі про розкрий: визначити повне число варіантів розкрою заготовки довжиною  $L$ , на деталі довжиною  $q_1, q_2, \dots, q_m$ . Для чого необхідно побудувати твірну функцію (в комбінаториці генератриса, від англ. *generating function*) розкрою наступного загального виду:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^{q_1})(1-x^{q_2})(1-x^{q_3})\dots(1-x^{q_m})}$$

та розкласти її в ряд Тейлора. Шукана кількість варіантів розкрою точно дорівнює коефіцієнту перед  $x^L$  в ряду Тейлора.

Приклад 2. Заготовлю довжиною 12 розкрийти на деталі довжиною 2, 3 та 4. В даному випадку найкоротша деталь дорівнює 2, тоді максимальна довжина відходу дорівнює 1.

Складемо твірну функцію  $f(x)$  та розкладемо її в ряд Тейлора:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} = 1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 4x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 4x^{11} + 7x^{12} + O(x^{13})$$

Тоді коефіцієнт при степені  $x^{12}$  встановлює кількість варіантів  $N_1 = 7$  розкрою заготовки з нульовими відходами. Аналогічно, кількість варіантів розкрою даної заготовки з відходом 1 дорівнює коефіцієнту при  $x^{11}$ , тобто  $N_2 = 4$ . Загальна кількість варіантів дорівнює  $N = N_1 + N_2 = 7 + 4 = 11$ .

Розглянемо ще один приклад.

Приклад 3. Маємо заготовлю довжиною 21, яку необхідно розкрийти на деталі довжиною 2, 12 та 4.

Для підрахунку варіантів розкрою складемо твірну функцію та розкладемо її в ряд Тейлора:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^{12})} = 1 + x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 3x^8 + 3x^{10} + 5x^{12} + 5x^{14} + 7x^{16} + 7x^{18} + 9x^{20} + 9x^{22} + O(x^{24})$$

З наведеної формули можна побачити, що всі степені членів ряду парні, оскільки потрібні довжини деталей парні. Задана заготовка довжиною 21 не може бути розкроєна безвідходно. При значенні відходів в 1 (тому що найкоротша деталь довжиною 2) число варіантів розкрою дорівнює коефіцієнту при  $x^{20}$ :  $N = 9$ .

Для побудови алгоритму, який дозволить побудувати усі варіанти розкрою, розглянемо геометричну інтерпретацію задачі в трьох вимірному випадку: знайти карту розкрою, тобто всі раціональні варіанти розкрою заготовки довжиною  $L$  на деталі трьох видів довжиною  $a, b, c$ .

В строго безвідходному випадку кількість деталей в варіанті розкрою визначається з (діофантового) рівняння [12]:

$$ax + by + cz = L,$$

де  $x, y, z$  – невід'ємні цілі числа.

Геометрично рівняння являє собою площину в просторі. А задача зводиться до знаходження всіх точок площини, які мають цілочисельні координати.

Далі, якщо при розкрою допустимі відходи, наприклад, максимальної довжини  $h$ , то пошук цілочисельного розв'язку відбувається вже не на площині, а в просторовій області, що задається двома нерівностями:

$$L - h \leq ax + by + cz \leq L$$

Геометрично область являє собою прошарок між двома паралельними площинами товщиною:

$$\frac{h}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Тоді пошук варіантів раціонального розкрою геометрично переформулюється так: знайти в області між двома паралельними площинами всі точки з цілочисельними координатами. Алгоритм реалізує послідовний перебір точок по кожному просторовому виміру.

Блок схема комбінаторного алгоритму для отримання всіх видів технологій представлена на рис. 1.

Підготовка до вирішення:

- відсортувати довжини деталей
- 

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_m;$$

– визначити максимальне допустиме значення величини відходів. Для відсортованих довжин деталей, це деталь  $q_m$ ;

$$del < \min(q_i) = q_m, i = \overline{1, m};$$

– визначити максимальну кількість деталей по кожному виду, які можна отримати з початкової заготовки

$$a_i^{\max} = \left\lfloor \frac{L}{q_i} \right\rfloor, i = \overline{1, m}, j = j + 1;$$

– визначити максимальну кількість варіантів розкрою, використовуючи твірну функцію,  $N$ ;

– обнулити технологічну матрицю варіантів розкрою

$$a_{ij} = 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

### Обговорення результатів

Використовуючи алгоритм, який представлений на рисунку 1 побудуємо технологічну матрицю варіантів розкрою для задачі, що розглянута в першому прикладі.

На етапі підготовки для вирішення:

відсортуємо довжини деталей в порядку убутання, тобто отримаємо наступну послідовність довжин деталей: 12, 4, 2;

максимальне допустиме значення величини відходів  $del < \min(q_i) = q_m = 2$ ;

максимальна кількість деталей по кожному виду, які можна отримати з початкової заготовки

$$a^{\max} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix};$$

з прикладу 3 нам відомо, що кількість варіантів розкрою дорівнює 9.

Результат формування матриці розкрою, використовуючи комбінаторний алгоритм розрахунку раціональних варіантів розкрою представлено в табл.1.

Таблиця 1 – Технологічна матриця варіантів розкрою

Довжини деталей	Технології розкрою								
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
12	0	0	0	0	0	0	1	1	1
4	0	1	2	3	4	5	0	1	2
2	10	8	6	4	2	0	4	2	0

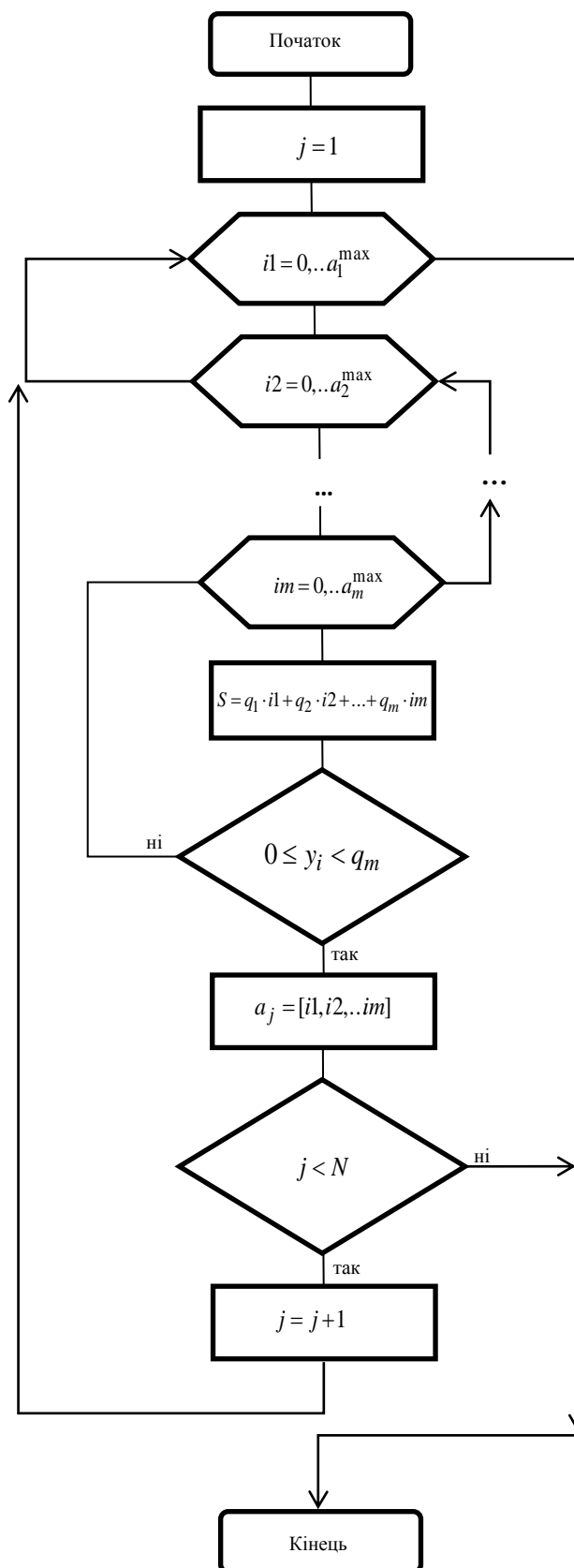


Рис. 1 – Блок-схема алгоритму побудови технологічної матриці варіантів розкрою

## Висновки

Розглянутий в роботі комбінаторний алгоритм розрахунку раціональних варіантів розкрою дозволяє швидко і надійно будувати технологічні карти розкрою малого та середнього розміру.

Для підрахунку кількості варіантів видів розкрою використовується твірна функція. Кількість варіантів розкрою дорівнює коефіцієнту при степені довжини деталі при розкладанні твірної функції в ряд Тейлора.

Визначення всіх варіантів розкрою в тривимірному випадку зводиться до пошуку всіх точок простору біля площини, побудованої на основі діофантового рівняння.

Наведена блок-схема алгоритму побудови технологічної матриці розкрою в загальному випадку.

Розглянуті чисельні приклади.

При значному збільшенні кількості видів деталей  $m$ , що треба розкроїти, час розрахунку карт розкрою зростає за законом геометричної прогресії  $t = O(a^m)$ .

## Список літератури

1. **Канторович, Л. В.** Рациональный раскрой промышленных материалов / **Л. В. Канторович, В. А. Залгаллер** // Изд. 3-е, испр. и доп. СПб.: [Невский Диалект], 2012. – 303 с.
2. **Мухачёва, Э. А.** Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение АСУ / **Э. А. Мухачёва** // Монография. – М.: Машиностроение, 1984. – 176 с.
3. **Валиахметова, Ю. И.** Теория оптимального использования ресурсов Л. В. Канторовича в задачах раскрой-упаковки: обзор и история развития методов решения [Электронный ресурс] / **Ю. И. Валиахметова, А. С. Филиппова** // *Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета*. – 2014. – № 1 (62). – 18. – С.186-197.
4. **Брейман, А. Д.** Рациональная организация данных аналитического компонента в индивидуальных информационных системах с использованием алгоритма упаковки с динамической внутренней границей объема [Электронный ресурс] / **А. Д. Брейман, М. В. Ульянов** // *Справочник. Инженерный журнал*. – 2004. – №12. – С. 17-22.
5. **Балабанов, В. Н.** Оптимизация раскроя рулонного металлопроката на слиттере / **В. Н. Балабанов., Ю. А. Скобцов** // *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. – 2010. – № 1(18). – С. 7-12.
6. **Dyckhoff, H.** Cutting and packing in production and distribution: A typology and bibliography / **H. Dyckhoff, U. Finke**. // Heidelberg: Physica-Verlag. – 1992. – 248 p.
7. **Wascher, G.** An improved typology of cutting and packing problems / **G. Wascher, H. Haussner, H. Schumann** // *European Journal of Operational Research*. – 2007. – Vol. 183. – 3. – P.1109-1130.
8. **Балабанов, В. Н.** Многокритериальная задача рационального планирования продольного раскроя

рулонного материала [Электронный ресурс] / **В. Н. Балабанов** // *Проблемы информационных технологий*. – 2009. – №2 (006).

9. **Косолап, А. И.** Оптимизация в задачах линейного раскрою материалов / **А. И. Косолап, Г. М. Кодола** // *Вісник Національного технічного університету "ХПІ"*. – 2016. – № 44 (1216) – С. 56-66. – doi:10.20998/2411-0558.2016.44.05.
10. **Кормен, Т.** Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. / **Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн** // М. : Издательский дом «Вильямс», 2011. – 1296 с.
11. **Грэхем, Р.** Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. / **Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник** // М.: Мир, 1998. – 703 с.
12. Diophantine Equation – Режим доступу: <http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html>.

## Bibliography (transliterated)

1. **Kantorovich, L. V., Zalgaller, V. A.** Racional'nyj raskroj promyshlennyh materialov. Izd. 3-e, ispr. i dop. SPb.: [Nevskij Dialekt], 2012, 303.
2. **Muhachjova, Je. A.** Racional'nyj raskroj promyshlennyh materialov. Primenenie ASU Monografija. – M.: Mashinostroenie, 1984, 176.
3. **Valiahmetova, Ju. I., Filippova, A. S.** Teorija optimal'nogo ispol'zovanija resursov L. V. Kantorovicha v zadachah raskroja-upakovki: obzor i istorija razvitija metodov reshenija. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviacionnogo tehničeskogo universiteta*, 2014, № 1 (62), 18, 186-197.
4. **Brejman, A. D., Ul'janov, M. V.** Racional'naja organizacija dannyh analiticheskogo komponenta v individual'nyh informacionnyh sistemah s ispol'zovanijem algoritma upakovki s dinamičeskoj vnutrennej granicej ob'ema Spravochnik. *Inženernyj zhurnal*, 2004, 12, 17-22.
5. **Balabanov, V. N., Skobcov, Ju. A.** Optimizacija raskroja rulonnogo metalloprokata na slittere. *Vіsник Donbas'koї derzhavnoї mashinobudivnoї akademії*, 2010, 1(18), 7-12.
6. **Dyckhoff, H.** Cutting and packing in production and distribution. A typology and bibliography Heidelberg: Physica-Verlag, 1992, 248.
7. **Wascher, G.** An improved typology of cutting and packing problems *European Journal of Operational Research*, 2007, Vol. 183, 3, 1109-1130.
8. **Balabanov, V. N.** Mnogokriterial'naja zadacha racional'nogo planirovanija prodol'nogo raskroja rulonnogo materiala *Problemy informacionnyh tehnologij*, 2009, 2 (006).
9. **Kosolap, A. I., Kodola, G. M.** Optimizacija v zadachah linijnogo rozkroju materialiv. *Bulletin of NTU "KhPI"*, 2016, 44 (1216), 56-66, doi:10.20998/2411-0558.2016.44.05.
10. **Kormen, T., Lejerson, Ch., Rivest, R., Shtajn K.** Algoritmy: postroenie i analiz, 2-e izdanie. : Per. s angl. Moskva, Izdatel'skij dom «Vil'jams», 2011, 1296.
11. **Grjehem, R., Knut, D., Patashnik, O.** Konkret'naja matematika. Osnovanie informatiki: Per. s angl. Moskva, Mir, 1998, 703.
12. Diophantine Equation. Rezhim dostupu: <http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation.html>.

**Відомості про авторів (About authors)**

**Кодола Галина Миколаївна** – викладач кафедри Інформаційних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет»; м. Дніпро, Україна; e-mail: galina\_kodola@udhtu.edu.ua.

**Galyna Kodola** – Information Control Systems and Technology, The Ukrainian State Chemical-Technological University, Dnipro, UKRAINE; e-mail: galina\_kodola@udhtu.edu.ua.

**Рогоза Борис Євгенійович** – старший викладач кафедри Інформаційних систем, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет»; м. Дніпро, Україна; e-mail: boris\_rogoza@udhtu.edu.ua.

**Boris Rogoza** – Information Control Systems and Technology, The Ukrainian State Chemical-Technological University, Dnipro, UKRAINE; e-mail: boris\_rogoza@udhtu.edu.ua.

*Будь ласка, посилайтесь на цю статтю наступним чином:*

**Кодола, Г. М.** Побудова технологічної матриці варіантів лінійного розкрою / **Г. М. Кодола, Б. Є. Рогоза** // *Вісник НТУ «ХПІ», Серія: Нові рішення в сучасних технологіях.* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2017. – № 23 (1245). – С. 111-116. – doi:10.20998/2413-4295.2017.23.18.

*Please cite this article as:*

**Kodola, G., Rogoza, B.** Construction a technological matrix of variants linear cutting. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: New solutions in modern technologies.* – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017, **23** (1245), 111–116, doi:10.20998/2413-4295.2017.23.18.

*Пожалуйста, ссылайтесь на эту статью следующим образом:*

**Кодола, Г. Н.** Построение технологической матрицы вариантов линейного раскроя / **Г. Н. Кодола, Б. Е. Рогоза** // *Вестник НТУ «ХПИ», Серія: Новые решения в современных технологиях.* – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2017. – № 23 (1245). – С. 111-116. – doi:10.20998/2413-4295.2017.23.18.

**АННОТАЦИЯ** В статье рассмотрен комбинаторный алгоритм расчета рациональных вариантов линейного раскроя материалов для построения технологической матрицы вариантов раскроя малой и средней размерности. Приведены примеры расчетов с помощью алгоритма.

**Ключевые слова:** линейный раскрой; технологическая матрица; алгоритм; вариант раскроя.

*Надійшла (received) 29.05.2017*