

Рис.10.Переходный процесс при  $K_y=2$ ;  $\delta=0,3\text{мм}$

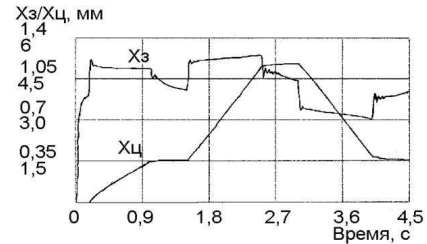


Рис. 11.Переходный процесс при  $K_y=1$ ;  $\delta=0,3\text{мм.}; d_{др}=0,6\text{мм}$

Переходный процесс регулятора – аperiodический, переходный процесс ЭГП – малоколебательный. Диапазон регулирования позиции золотника ДРГ составил 0,3 и 0,7 см, что соответствует требуемому диапазону регулирования расхода.

Таким образом, динамические характеристики каскада управления удовлетворяют поставленным требованиям.

В результате выполнения машинного эксперимента были получены графики переходных процессов регулирования положения золотника дросселя регулируемого гидроуправляемого. Исследование исходных графиков показало необходимость увеличения положительного перекрытия дроссельного делителя и введения дополнительного дросселя на выходе ЭГП. Величина положительного перекрытия  $\delta = 0,3$  мм, диаметр дросселя  $d_{др} = 0,6$  мм. В результате время переходного процесса перемещения золотника ДРГ составило 1,1 с, погрешность позиционирования золотника ДРГ менее 1 %, что соответствует техническим требованиям к регулятору.

**Список литературы:** 1. Бондарь В.А. Новыє рішення в гидроприводі тракторів // Промислова гідроліка і пневматика. — 2003. — № 2. — С. 81 — 84. 2. Попов Д.Н. Динаміка і регулювання гідро- і пневмосистем.: Учебник для ВУЗів, 2-е изд. — М.: Машиностроение, 1987. — 464 с. 3. Гамынин Н.С. Гидравлический привод систем управления. — М.: Машиностроение, 1972. — 376 с. 4. Следящие приводы. Часть 2. Под ред. Б.К. Чемоданова. — М.: Энергия, 1976. — 384 с. 5. Абрамов Е.И., Колесниченко К.А., Маслов В.Т. Элементы гидропривода. К.: Техника, 1977. — 320 с.

Поступила в редколлегию 15.03.2012

УДК 539.3

**Е.Н. МИХАЙЛУЦА**, ст. преп., директор центра непрерывного образования, ЗГИА, Запорожье

## СТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМ СОЕДИНЕНИЕМ СЛОЕВ

Получено стационарное решение задачи о движении несимметричной нормальной нагрузки вдоль бесконечно длинной двухслойной цилиндрической оболочки с тонким упругим соединением. Исследовано влияние диссипативных свойств прослойки на картину напряженно-деформированного состояния конструкции.

**Ключевые слова:** диссипация, инерциальность прослойки, преобразование Фурье.

Отримано стаціонарне рішення задачі про рух невісесиметричного нормального навантаження вздовж нескінченно довгої двошарової циліндричної оболонки з тонким пружним з'єднанням.

Досліджено вплив дисипативних властивостей прошарку на картину напружено-деформованого стану конструкції.

**Ключові слова:** дисипація, інерціальність прошарку, перетворення Фур'є.

Obtained a stationary solution of the problem of motion nonaxisymmetric normal load along an infinitely long two-layer cylindrical shell with a thin elastic coupling. The influence of the dissipative properties of the layer at a picture of the stress-strain state of structures is investigated.

**Keywords:** dissipation, inertiality of the interlayer, Furie transform.

## 1. Введение

Составляющие элементы конструкций, моделями которых являются двухслойные оболочки, нашли широкое применение в современной авиационной и космической технике, судостроении, строительстве инженерных сооружений. Задачи исследования динамических характеристик таких конструкций возникают при проектировании подземных и подводных емкостей и трубопроводов, облицовки тоннелей метро, разработке элементов твердотопливных двигателей и т.п. В процессе эксплуатации составные конструкции подобного вида подвергаются динамическим нагрузкам, которые вызывают в них колебания и стационарные волновые процессы. В наше время, когда значительно увеличились требования к точности расчетов, возрастает роль динамического моделирования работы конструкций подобного рода. Поэтому построение моделей динамического поведения таких конструкций и разработка эффективных методов расчета представляет собой актуальную задачу механики деформируемого твердого тела.

При анализе задач о воздействии подвижных нагрузок на слоистые среды, в основном, рассматривались докритические скорости движения нагрузок в предположении о некотором идеальном (жестком или скользящем) контакте между слоями [1]. Однако на практике между слоями часто существует прослойка (склейка), обладающая гибкостью и имеющая отличные от несущих слоев характеристики, влиянием которой не стоит пренебрегать. В работах Jones и Whittier [3] рассмотрено распространение волн в двух полупространствах, соединенных подобной прослойкой. Данная связь инерциальна и при ее моделировании нормальное и касательное напряжения зависят от разности соответствующих перемещений.

## 2. Постановка задачи и результаты исследования

В данной работе исследуется случай движения по внутренней стороне бесконечно длинной двухслойной цилиндрической оболочки самоуравновешенных нагрузок, перемещающихся с постоянной скоростью в осевом направлении. Рассматриваемая конструкция состоит из неодинаковых по механическим параметрам слоев с тонким упругим соединением, характеристики которого отличны от каждого из слоев, т.е. контакт между слоями цилиндрической оболочки принимается неидеальным. Рассматриваются подвижные нагрузки типа волны давления, т.е. инерция движущихся объектов не учитывается, процесс будем считать установившимся, а получаемые решения являются инвариантными относительно времени в подвижной системе координат.

Движение слоев двухслойной конструкции описывается динамическими уравнениями теории упругости, которые в векторной форме имеют вид [1]:

$$(\lambda_k + 2\mu_k)\text{grad div } \bar{U}^{(k)} - \mu_k \text{rot rot } \bar{U}^{(k)} = \rho_k \frac{\partial^2 \bar{U}^{(k)}}{\partial t^2} \quad (1)$$

Здесь  $\bar{U}^{(k)} = (U_x^{(k)}, U_\theta^{(k)}, U_r^{(k)})$  – вектор перемещения точек точек k-го слоя оболочки, где  $k=1$  относится к внутреннему, а  $k=2$  – к наружному слою конструкции,  $\lambda_k, \mu_k$  – параметры Ламе;  $\rho_k, \nu_k, G_k$  – плотность, коэффициент Пуассона и модуль сдвига слоев. При рассмотрении установившегося процесса применяется преобразование Галилея  $\eta = \frac{x - ct}{d}$ , с помощью которого в рассматриваемых стационарных задачах исключается независимая переменная времени  $t$  и вводится в уравнения параметр – скорость движения нагрузки  $c$ . В подвижной системе координат, определяемой указанным выше преобразованием, задача сводится к интегрированию уравнения движения слоев при выполнении следующих граничных условий на поверхностях слоев:

$$\text{при } r = d \quad \sigma_{rx}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(2)} = -F, \quad \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0, \quad (2)$$

$$\text{при } r = a \quad \sigma_{rx}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{rr}^{(1)} = F, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0,$$

$$\text{при } r = b \quad \sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{rx}^{(1)} = \sigma_{rx}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)},$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \left[ \frac{E}{h} + \eta_N \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] (U_r^{(1)} - U_r^{(2)}), \quad \sigma_{rx}^{(1)} = \left[ \frac{G}{h} + \eta_S \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] (U_x^{(1)} - U_x^{(2)}), \quad (2)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \left[ \frac{G}{h} + \eta_S \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] (U_\theta^{(1)} - U_\theta^{(2)}),$$

где  $k_N, k_S, \eta_N, \eta_S$  – коэффициенты жесткости и демпфирования прослойки в нормальном и касательном направлениях.

Преобразуем уравнения движения слоев, вводя потенциальные функции по формулам:

$$\begin{aligned} U_r^{(k)} &= \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial \theta}, \\ U_\theta^{(k)} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial x \partial \theta} \psi^{(k)} - \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial r}, \\ U_x^{(k)} &= \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (3)$$

В этом случае компоненты напряжения через потенциальные функции запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{rr}^{(k)}}{G_k} &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial r^2} \right) + \\
&+ 2 \cdot \left( \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial x \partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \chi^{(k)}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial \theta} \right), \\
\frac{\sigma_{r\theta}^{(k)}}{G_k} &= -\frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial r \partial x \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial x \partial \theta} + \\
&+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \chi^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi^{(k)}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \chi^{(k)}}{\partial r^2}, \\
\frac{\sigma_{rx}^{(k)}}{G_k} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi^{(k)}}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial r} - \\
&- \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 \psi^{(k)}}{\partial r \partial x^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \chi^{(k)}}{\partial x \partial \theta}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для дальнейших вычислений перейдем к безразмерным переменным, отнеся все линейные величины к наружному радиусу составной оболочки  $d$ :

$$\{U_{\theta}^*, U_r^*, U_x^*\} = \frac{1}{d} \{U_{\theta}, U_r, U_x\}, \quad \kappa_s = \frac{h_1}{h_2}, \quad \kappa_{s1} = \frac{h}{h_2}, \quad \gamma_1 = \frac{G}{G_2}, \quad \gamma = \frac{G_2}{G_1},$$

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{d} = 1 - \kappa_1 - \kappa_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{b}{d} = 1 - \kappa_2, \quad \kappa_1 = \frac{h_1}{d}, \quad \kappa_2 = \frac{h_2}{d}, \quad h_1 = b - a, \quad h_2 = d - b,$$

где  $h_1, h_2$  – толщины внутреннего и внешнего слоя оболочки соответственно.

Далее, для решения уравнений движения слоев оболочки (1) применим комплексное преобразование Фурье по переменной  $\eta$  и разложим потенциальные функции в ряды Фурье по формулам:

$$\{\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{\varphi_n^{(k)}, \psi_n^{(k)}\} \cos(n\theta), \quad \chi^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n^{(k)} \sin(n\theta). \tag{5}$$

В результате тензор перемещения слоев цилиндрической оболочки и тензор напряжения запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
U_{r,n}^{(k)}(r, \xi) &= \frac{d\varphi_n^{(k)}}{dr} - i \frac{\xi}{d} \frac{d\psi_n^{(k)}}{dr} + \frac{n}{r} \chi_n^{(k)}, \quad U_{\theta,n}^{(k)}(r, \xi) = -\frac{n}{r} \varphi_n^{(k)} + i \frac{\xi}{d} \frac{n}{r} \psi_n^{(k)} - \frac{d\chi_n^{(k)}}{dr}, \\
U_{x,n}^{(k)}(r, \xi) &= i \frac{\xi}{d} \varphi_n^{(k)} + \frac{d^2 \psi_n^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_n^{(k)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \psi_n^{(k)},
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr,n}^{(k)}(r, \xi) &= \lambda_k \left( \frac{d^2 \varphi_n^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_n^{(k)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \varphi_n^{(k)} - \frac{\xi^2}{d^2} \varphi_n^{(k)} \right) + \\
&+ 2\mu_k \left( \frac{d^2 \varphi_n^{(k)}}{dr^2} - i \frac{\xi}{d} \frac{d^2 \psi_n^{(k)}}{dr^2} + \frac{n}{r} \frac{d\chi_n^{(k)}}{dr} - \frac{n}{r^2} \chi_n^{(k)} \right), \\
\sigma_{rx,n}^{(k)}(r, \xi) &= \mu_k \left( 2i \frac{\xi}{d} \frac{d\varphi_n^{(k)}}{dr} + \frac{d^3 \psi_n^{(k)}}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \psi_n^{(k)}}{dr^2} - \frac{n^2 + 1}{r^2} \frac{d\psi_n^{(k)}}{dr} + \right. \\
&\left. + \frac{2n^2}{r^3} \psi_n^{(k)} + \frac{\xi^2}{d^2} \frac{d\psi_n^{(k)}}{dr} + i \frac{n\xi}{dr} \chi_n^{(k)} \right), \\
\sigma_{r\theta,n}^{(k)}(r, \xi) &= \mu_k \left[ \frac{2n}{r} \left( \frac{\varphi_n^{(k)}}{r} - \frac{d\varphi_n^{(k)}}{dr} \right) + i \frac{2n\xi}{dr} \frac{d\psi_n^{(k)}}{dr} - i \frac{2n\xi}{dr^2} \psi_n^{(k)} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{r} \frac{d\chi_n^{(k)}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \chi_n^{(k)} - \frac{d^2 \chi_n^{(k)}}{dr^2} \right],
\end{aligned}$$

а для уравнений движения слоев получим видоизмененные волновые уравнения вида:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{m_k^2 \xi^2}{d^2} \right) \right) \varphi_n^{(k)} &= 0, \\
\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{m_{sk}^2 \xi^2}{d^2} \right) \right) (\psi_n^{(k)}, \chi_n^{(k)}) &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

в которых

$$m_1 = \sqrt{1 - \theta_1 c^{*2}}, \quad m_2 = \sqrt{1 - \frac{\rho}{\gamma} \theta_2 c^{*2}}, \quad m_{s1} = \sqrt{1 - c^{*2}}, \quad m_{s2} = \sqrt{1 - \frac{\rho}{\gamma} c^{*2}}, \quad \theta_k = \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)}.$$

Решения волновых уравнений являются линейной комбинацией функций Бесселя от мнимого аргумента первого и второго рода  $n$ -го порядка:

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(k)}(r, \xi) &= A_n^{(k)}(\xi) K_n(m_k \xi r) + B_n^{(k)}(\xi) I_n(m_k \xi r), \\
\psi_n^{(k)}(r, \xi) &= C_n^{(k)}(\xi) K_n(m_{sk} \xi r) + D_n^{(k)}(\xi) I_n(m_k \xi r), \\
\chi_n^{(k)}(r, \xi) &= E_n^{(k)}(\xi) K_n(m_{sk} \xi r) + S_n^{(k)}(\xi) I_n(m_k \xi r).
\end{aligned} \tag{8}$$

Тогда для каждого слоя двухслойной конструкции компоненты тензора перемещения и напряжения примут вид:

$$\begin{aligned}
U_{x,n}^{(k)} &= i\eta K_n(m_k \eta r^*) A_n^{(k)} + i\eta I_n(m_k \eta r^*) B_n^{(k)} + m_{sk}^2 \eta^2 K_n(m_{sk} \eta r^*) C_n^{(k)} + \\
&+ m_{sk}^2 \eta^2 I_n(m_{sk} \eta r^*) D_n^{(k)},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
U_{r,n}^{(k)} &= \left[ \frac{n}{r^*} K_n(m_k \eta r^*) - m_k \eta K_{n+1}(m_k \eta r^*) \right] A_n^{(k)} + \left[ \frac{n}{r^*} I_n(m_k \eta r^*) + m_k \eta I_{n+1}(m_k \eta r^*) \right] B_n^{(k)} - \\
&- i\eta \left[ \frac{n}{r^*} K_n(m_{sk} \eta r^*) - m_{sk} \eta K_{n+1}(m_{sk} \eta r^*) \right] C_n^{(k)} - i\eta \left[ \frac{n}{r^*} I_n(m_{sk} \eta r^*) + m_{sk} \eta I_{n+1}(m_{sk} \eta r^*) \right] D_n^{(k)} + \\
&+ \frac{n}{r^*} K_n(m_{sk} \eta r^*) E_n^{(k)} + \frac{n}{r^*} I_n(m_{sk} \eta r^*) S_n^{(k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\theta,n}^{(k)} &= -\frac{n}{r^*} K_n(m_k \eta r^*) A_n^{(k)} + \frac{n}{r^*} I_n(m_k \eta r^*) B_n^{(k)} + \frac{i\eta}{r^*} K_n(m_{sk} \eta r^*) C_n^{(k)} + \\
&+ \frac{i\eta}{r^*} I_n(m_{sk} \eta r^*) D_n^{(k)} - \left[ \frac{n}{r^*} K_n(m_{sk} \eta r^*) - m_{sk} \eta K_{n+1}(m_{sk} \eta r^*) \right] E_n^{(k)} - \\
&- \left[ \frac{n}{r^*} I_n(m_{sk} \eta r^*) + m_{sk} \eta I_{n+1}(m_{sk} \eta r^*) \right] S_n^{(k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{r,n}^{(k)}}{G_k} &= \left( \left[ (1 + m_{sk}^2) \eta^2 + \frac{2n(n-1)}{r^2} \right] K_n(m_k \eta r^*) + \frac{2m_k \eta}{r} K_{(n+1)}(m_k \eta r^*) \right) A_n^{(k)} + \\
&+ \left( \left[ (1 + m_{sk}^2) \eta^2 + \frac{2n(n-1)}{r^2} \right] I_n(m_k \eta r^*) - \frac{2m_k \eta}{r} I_{(n+1)}(m_k \eta r^*) \right) B_n^{(k)} - \\
&- 2i\eta \cdot \left( \left[ \frac{n(n-1)}{r^2} + m_{sk}^2 \eta^2 \right] K_n(m_{sk} \eta r^*) + \frac{m_{sk} \eta}{r} K_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right) C_n^{(k)} - \\
&- 2i\eta \cdot \left( \left[ \frac{n(n-1)}{r^2} + m_{sk}^2 \eta^2 \right] I_n(m_{sk} \eta r^*) - \frac{m_{sk} \eta}{r} I_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right) D_n^{(k)} + \\
&+ 2 \frac{n}{r} \cdot \left[ \frac{n-1}{r} K_n(m_{sk} \eta r^*) - m_{sk} \eta K_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] E_n^{(k)} - \\
&+ 2 \frac{n}{r} \cdot \left[ \frac{n-1}{r} I_n(m_{sk} \eta r^*) + m_{sk} \eta I_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] S_n^{(k)}, \\
\frac{\sigma_{r\theta,n}^{(k)}}{G_k} &= \frac{2n}{r^2} \cdot \left( (1-n) K_n(m_k \eta r^*) + m_k \eta r K_{(n+1)}(m_k \eta r^*) \right) A_n^{(k)} + \\
&+ \frac{2n}{r^2} \cdot \left( (1-n) I_n(m_k \eta r^*) - m_k \eta r I_{(n+1)}(m_k \eta r^*) \right) B_n^{(k)} + \\
&+ i\eta \frac{2n}{r^2} \cdot \left[ (1-n) K_n(m_{sk} \eta r^*) + m_{sk} \eta r K_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] C_n^{(k)} + \\
&+ i\eta \frac{2n}{r^2} \cdot \left[ (1-n) I_n(m_{sk} \eta r^*) - m_{sk} \eta r I_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] D_n^{(k)} - \\
&- \frac{2}{r^2} \cdot \left[ \left( n(n-1) + \frac{1}{2m_{sk}^2 \eta^2 r^2} \right) K_n(m_{sk} \eta r^*) + m_{sk} \eta r K_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] E_n^{(k)} - \\
&- \frac{2}{r^2} \cdot \left[ \left( n(n-1) + \frac{1}{2m_{sk}^2 \eta^2 r^2} \right) I_n(m_{sk} \eta r^*) - m_{sk} \eta r I_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] S_n^{(k)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{rx,n}^{(k)}}{G_k} &= 2i\eta \cdot \left( \left[ \frac{n}{r} K_n(m_k \eta r^*) - m_{sk} \eta K_{(n+1)}(m_k \eta r^*) \right] A_n^{(k)} + \right. \\
&+ \left. \left[ \frac{n}{r} I_n(m_k \eta r^*) + m_{sk} \eta I_{(n+1)}(m_k \eta r^*) \right] B_n^{(k)} \right) + \\
&+ (1 + m_{sk}^2) \eta^2 \cdot \left[ \frac{n}{r} K_n(m_{sk} \eta r^*) - m_{sk} \eta K_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] C_n^{(k)} + \\
&+ (1 + m_{sk}^2) \eta^2 \cdot \left[ \frac{n}{r} I_n(m_{sk} \eta r^*) + m_{sk} \eta I_{(n+1)}(m_{sk} \eta r^*) \right] D_n^{(k)} + \\
&+ i \frac{\eta n}{r} \cdot (K_n(m_{sk} \eta r^*) E_n^{(k)} + I_n(m_{sk} \eta r^*) S_n^{(k)}).
\end{aligned}$$

Используя полученные выражения для тензора перемещения и напряжения слоев двухслойной оболочки в пространстве изображений, удовлетворяем граничным условиям (2). В результате громоздких, но несложных преобразований получаем систему двенадцати линейных комплексных уравнений. Проводя затем замену искомых коэффициентов по формулам:

$$\begin{aligned}
A_n^{(1)*} &= K_{n+1}(m_1 \xi \varepsilon_1) A_n^{(1)}, & B_n^{(1)*} &= I_{n+1}(m_1 \xi \varepsilon_1) B_n^{(1)}, \\
C_n^{(1)*} &= K_{n+1}(m_{s1} \xi \varepsilon_1) C_n^{(1)}, & D_n^{(1)*} &= I_{n+1}(m_{s1} \xi \varepsilon_1) D_n^{(1)}, \\
E_n^{(1)*} &= K_{n+1}(m_{s1} \xi \varepsilon_1) E_n^{(1)}, & S_n^{(1)*} &= I_{n+1}(m_{s1} \xi \varepsilon_1) S_n^{(1)}, \\
A_n^{(2)*} &= K_{n+1}(m_2 \xi) A_n^{(2)}, & B_n^{(2)*} &= I_{n+1}(m_2 \xi) B_n^{(2)}, \\
C_n^{(2)*} &= K_{n+1}(m_{s2} \xi) C_n^{(2)}, & D_n^{(2)*} &= I_{n+1}(m_{s2} \xi) D_n^{(2)}, \\
E_n^{(2)*} &= K_{n+1}(m_{s2} \xi) E_n^{(2)}, & S_n^{(2)*} &= I_{n+1}(m_{s2} \xi) S_n^{(2)},
\end{aligned}$$

решаем полученную систему численно на ЭВМ методом Гаусса путем замены каждого комплексного уравнения парой действительных. В результате определялись действительная и мнимая части неизвестных  $A_n^{(k)*}, B_n^{(k)*}, C_n^{(k)*}, D_n^{(k)*}, E_n^{(k)*}, S_n^{(k)*}$ ,  $k=1,2$  в зависимости от вида приложенной нагрузки. Выражения для компонент перемещения и напряжения в любой точке конструкции в пространстве изображений примут вид:

$$U_r^{(1)} = \frac{F}{G_1} \cdot (T_{1Re}(\xi, r^*) + iT_{1Im}(\xi, r^*)), \quad \sigma_r^{(1)} = F \cdot (T_{2Re}(\xi, r^*) + iT_{2Im}(\xi, r^*)), \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\text{где} \quad T_{1Re}(\xi, r^*) &= \left[ \frac{n}{r^*} S_{29} - m_1 \xi S_{30} \right] \text{Re}(A_n^{(1)*}) + \left[ \frac{n}{r^*} S_{31} + m_1 \xi S_{32} \right] \text{Re}(B_n^{(1)*}) - \\
&- \xi \left[ \frac{n}{r^*} S_{33} - m_{s1} \xi S_{34} \right] \text{Im}(C_n^{(1)*}) - \xi \left[ \frac{n}{r^*} S_{35} + m_{s1} \xi S_{36} \right] \text{Im}(D_n^{(1)*}) + \\
&\quad + \frac{n}{r^*} S_{33} \text{Re}(E_n^{(1)*}) + \frac{n}{r^*} S_{35} \text{Re}(S_n^{(1)*}), \\
T_{1Im}(\xi, r^*) &= \left[ \frac{n}{r^*} S_{29} - m_1 \xi S_{30} \right] \text{Im}(A_n^{(1)*}) + \left[ \frac{n}{r^*} S_{31} + m_1 \xi S_{32} \right] \text{Im}(B_n^{(1)*}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \xi \left[ \frac{n}{r^*} S_{33} - m_{s1} \xi S_{34} \right] \operatorname{Re} \left( C_n^{(1)*} \right) + \xi \left[ \frac{n}{r^*} S_{35} + m_{s1} \xi S_{36} \right] \operatorname{Re} \left( D_n^{(1)*} \right) + \\
& \quad + \frac{n}{r^*} S_{33} \operatorname{Im} \left( E_n^{(1)*} \right) + \frac{n}{r^*} S_{35} \operatorname{Im} \left( S_n^{(1)*} \right), \\
T_{2\operatorname{Re}}(\xi, r^*) = & \left( \left[ \left( 1 + m_{s1}^2 \right) \xi^2 + \frac{2n(n-1)}{r^{*2}} \right] S_{29} + \frac{2m_1 \xi}{r^*} S_{30} \right) \operatorname{Re} \left( A_n^{(1)*} \right) + \\
& + \left( \left[ \left( 1 + m_{s1}^2 \right) \xi^2 + \frac{2n(n-1)}{r^{*2}} \right] S_{31} - \frac{2m_1 \xi}{r^*} S_{32} \right) \operatorname{Re} \left( B_n^{(1)*} \right) - \\
& - 2\xi \left[ \left( \frac{n(n-1)}{r^{*2}} + m_{s1}^2 \xi^2 \right) S_{33} + \frac{m_{s1} \xi}{r^*} S_{34} \right] \operatorname{Im} \left( C_n^{(1)*} \right) - \\
& - 2\xi \left[ \left( \frac{n(n-1)}{r^{*2}} + m_{s1}^2 \xi^2 \right) S_{35} - \frac{m_{s1} \xi}{r^*} S_{36} \right] \operatorname{Im} \left( D_n^{(1)*} \right) + \\
& + 2 \frac{n}{r^*} \left[ \frac{n-1}{r^*} S_{33} - m_{s1} \xi S_{34} \right] \operatorname{Re} \left( E_n^{(1)*} \right) + 2 \frac{n}{r^*} \left[ \frac{n-1}{r^*} S_{35} + m_{s1} \xi S_{36} \right] \operatorname{Re} \left( S_n^{(1)*} \right), \\
T_{2\operatorname{Im}}(\xi, r^*) = & \left( \left[ \left( 1 + m_{s1}^2 \right) \xi^2 + \frac{2n(n-1)}{r^{*2}} \right] S_{29} + \frac{2m_1 \xi}{r^*} S_{30} \right) \operatorname{Im} \left( A_n^{(1)*} \right) + \\
& + \left( \left[ \left( 1 + m_{s1}^2 \right) \xi^2 + \frac{2n(n-1)}{r^{*2}} \right] S_{31} - \frac{2m_1 \xi}{r^*} S_{32} \right) \operatorname{Im} \left( B_n^{(1)*} \right) + \\
& + 2\xi \left[ \left( \frac{n(n-1)}{r^{*2}} + m_{s1}^2 \xi^2 \right) S_{33} + \frac{m_{s1} \xi}{r^*} S_{34} \right] \operatorname{Re} \left( C_n^{(1)*} \right) + \\
& + 2\xi \left[ \left( \frac{n(n-1)}{r^{*2}} + m_{s1}^2 \xi^2 \right) S_{35} - \frac{m_{s1} \xi}{r^*} S_{36} \right] \operatorname{Re} \left( D_n^{(1)*} \right) + \\
& + 2 \frac{n}{r^*} \left[ \frac{n-1}{r^*} S_{33} - m_{s1} \xi S_{34} \right] \operatorname{Im} \left( E_n^{(1)*} \right) + 2 \frac{n}{r^*} \left[ \frac{n-1}{r^*} S_{35} + m_{s1} \xi S_{36} \right] \operatorname{Im} \left( S_n^{(1)*} \right)
\end{aligned}$$

Дальнейший ход алгоритма заключается в суммировании рядов Фурье по угловой координате с последующим обратным преобразованием Фурье, которое необходимо произвести после подстановки выражения для нагрузки.

В качестве примера выберем нагрузку, приложенную к внутренней стороне оболочки симметрично относительно центра. Рассматривался случай приложения двух равных нагрузок  $F$  при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Аналитически каждая нагрузка имеет вид:

$$F = F_0 \cdot h(\eta) \delta(\theta - \theta_k) \quad (11)$$

$$\text{где } h(\eta) = \begin{cases} 1, & |\eta| \leq a^* \\ 0, & |\eta| > a^* \end{cases}, \quad a^* = \frac{a}{d}, \quad \delta(\theta - \theta_k) \text{ — дельта-функция Дирака.}$$



Применим к нагрузке преобразование Фурье по пространственной координате и разложение в ряд Фурье по угловой координате:

$$F^\Phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{F_0}{G_1} \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n\theta) \quad (12)$$

здесь 
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int (\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)) \cos(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot (1 + (-1)^n)$$

Заключительный этап алгоритма заключается в подстановке выражения для нагрузки (12) в (10) и возвращения в пространство оригиналов. Для этого суммируем ряды Фурье, после чего применяем обратное преобразование Фурье. В качестве примера, приведем окончательные выражения для радиального перемещения:

$$U_r^{(1)\Phi} = \frac{1}{G_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot F_0 \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (b_n (T_{1Re}(\xi, r^*) + i \cdot T_{1Im}(\xi, r^*)) \cos(n\theta)),$$

$$U_r^{(1)} = \frac{1}{G_1} \frac{F_0}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (T_{1Re}(\xi, r^*) + iT_{1Im}(\xi, r^*) \cos(n\theta)) \cdot \frac{\sin(\xi a^*)}{\xi} (\cos(\xi\eta) - i \sin(\xi\eta)) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (T_{1Re}(\xi, r^*) + iT_{1Im}(\xi, r^*) \cos(n\theta)) \cdot \frac{\sin(\xi^* a^*)}{\xi^*} (\cos(\xi^* \eta) - i \sin(\xi^* \eta)) d\xi^* \right], \xi^* = -\xi.$$

Полученные интегралы вычислялись численно на основе алгоритма с применением метода Файлона [2]. Верхний предел и шаг интегрирования по пространственной координате определялись опытным путем с условием обеспечения по всем искомым величинам заданной относительной точности.

Напряженно – деформированное состояние конструкции исследовалось при следующих значениях безразмерных параметров:  $\nu = \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $\kappa_s = 10$ ,  $\kappa_{s1} = 0.1$ ,  $\gamma_1 = 0.001$ ,  $\gamma_x^* = \gamma_z^* = 100$ .

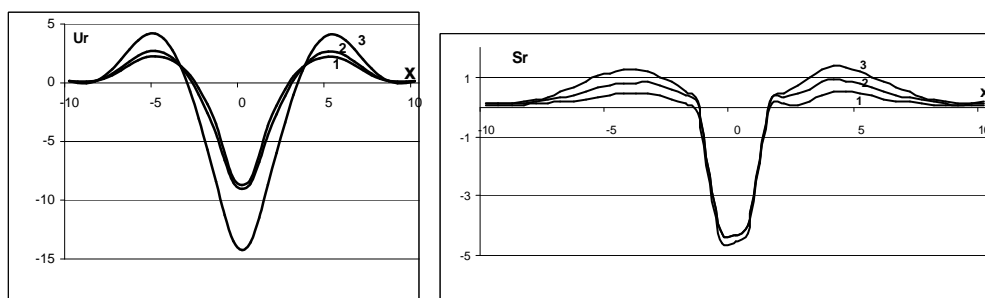


Рис.1. Влияние жесткости оболочки на распределение перемещения и напряжения по осевой координате

При проведении численных экспериментов основное внимание уделялось картине установившегося процесса в точке под серединой нагрузки на границе раздела слоев конструкции. Исследовалось влияние физических и механических характеристик модели на распределение компонент напряженно–деформированного состояния. Построены картины распределения нормальной составляющей напряжения, а также нормальной компоненты перемещения по осевой координате.

Рис.1 иллюстрирует влияние относительной жесткости слоев оболочки на картину установившегося процесса. При этом кривые 1–3 соответствуют  $\gamma = \rho = 100, 150, 200$  при  $c^* = 0.3, a^* = 1, \kappa_2 = 0.004$  соответственно

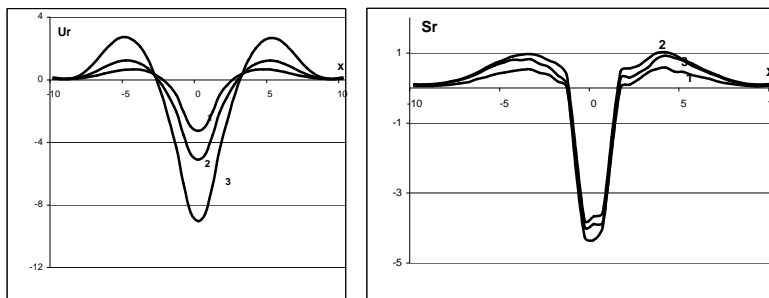


Рис.2. Зависимость нормального напряжения от скорости движения Нагрузки

Влияние скорости движения нагрузки на картину деформации представлено на рисунке 2. Аналогично предыдущим рисункам графики построены для следующих значений безразмерной скорости движения нагрузки:  $c^* = 0.1, 0.2, 0.3$ , при  $\gamma = \rho = 150$ .

### 3. Выводы

Рассмотрена стационарная задача динамики двухслойной цилиндрической оболочки с упругой прослойкой. Основной акцент уделен рассмотрению особенностей влияния несовершенной связи между неодинаковыми по механическим характеристикам слоями. Разработан и апробирован алгоритм, позволяющий рассчитывать значения компонент напряженно-деформированного состояния в произвольной точке конструкции с упругим соединением слоев.

В результате исследований получены графики, наглядно демонстрирующие влияние податливости соединения на закономерности распределения перемещения и напряжения. Показано, что учет податливости склейки и наличия диссипации позволяет более точно описывать динамическую картину деформации слоистой конструкции.

**Список литературы:** 1. Горшков А.Г. Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / Пожурев В.И. –М.: Машиностроение, 1992. –224 с. 2. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения Лапласа / Скобля Н.С. – М.: Наука, 1974. –223с. 3. Jones J.P. Waves at a flexibly bonded interface / Whitter J.S. // Trans/ ASME. Ser.E. J. Appl. Mech. –1967. –V. 34, №4. –P. 178–183.

*Поступила в редколлегию 15.03.2012*

**УДК 621.735**

**Т.Н. КОВШАНОВА**, маг., НТУ «ХПИ», Харьков,  
**В.Н. ЛЕВЧЕНКО**, канд. техн. наук, доц, НТУ «ХПИ», Харьков

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ГОРЯЧЕЙ ОБЪЕМНОЙ ШТАМПОВКИ ДЕТАЛИ ТИПА «КРЫШКА» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведено математическое моделирование процесса штамповки поковки на молоте с использованием пакета Deform-3D. Изложены результаты теоретического исследования течения металла цилиндрических заготовок в полость штампа в зависимости от скорости деформирования.