

УДК 681.5

doi:10.20998/2413-4295.2026.01.03

НЕЛІНІЙНІ СТАЦІОНАРНІ ЗБУДЖЕННЯ ФЕРОМАГНЕТИКУ КІНЦЕВОГО РОЗМІРУ ПІД ВПЛИВОМ ВЧ-ПОЛЯ

А. О. ПЕРЕТЯТКО^{1*}, О. С. КОВАЛЬОВ^{2,3}

¹ Кафедра фізики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» Харків, УКРАЇНА

² Відділ теоретичної фізики, Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна НАН України, Харків, УКРАЇНА

³ Кафедра теоретичної фізики, Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, УКРАЇНА

*e-mail: Anastasii.Peretiatko@khipt.edu.ua

АНОТАЦІЯ Проаналізовано нелінійні стаціонарні збудження легковісного ферромагнетика кінцевого розміру за наявності зовнішнього локалізованого високочастотного поля, що прикладено на границі системи. Теоретичний розгляд проводився на прикладі одновимірної системи, динаміка якої описується нелінійним рівнянням Шредингера. Знайдено залежності динамічних параметрів збуджень системи від параметрів зовнішнього поля: його амплітуди і частоти. Проведено класифікацію всіх стаціонарних (одночастотних) станів, які можуть збуджуватися в розглянутій системі. Зокрема проаналізована залежність енергії, амплітуди та норми стаціонарних станів від амплітуди зовнішнього поля при різних значеннях частоти поля та довжини ланцюжка. Показано, що наявність прямого резонансного впливу на систему призводить при низьких рівнях збудження до виникнення локалізованих стаціонарних станів які можуть існувати тільки при частотах, які лежать нижче частоти однорідного ферромагнітного резонансу. Так, станам із найменшими значеннями енергії будуть відповідати локальні квазілінійні моди, що локалізовані в області прикладення зовнішнього поля. Крім цього, виникатимуть квазісолітонні стани, які можуть бути локалізовані як в області прикладення поля, так і у вузькій області поблизу вільної межі системи. При вищих рівнях збудження системи виникають просторово періодичні стани, які мають вигляд нелінійних стоячих хвиль. Були розглянуті два граничні випадки. Для випадку «великої» довжини системи показано, що залежність норми розв'язків від амплітуди зовнішнього поля при низьких рівнях збудження системи якісно збігається з аналогічною залежністю для розв'язків, які відповідають стаціонарним солітоноподібним станам, що виникають в системі необмеженої довжини. У випадку «малої» довжини система при низьких рівнях збудження якісно близька до осцилятора в умовах нелінійного резонансу. Отримані результати вказують на те, що при заданому значенні частоти зовнішнього поля стаціонарні стани, що належать різним типом збуджень, існують лише в певних інтервалах значень амплітуди поля, ширина яких залежить від довжини ланцюжка.

Ключові слова: легковісний ферромагнетик; локалізоване поле; нелінійний резонанс; солітони; локальні моди; нелінійні стоячі хвилі

NON-LINEAR STATIONARY EXCITATIONS IN A FINITE-SIZE FERROMAGNET UNDER THE INFLUENCE OF A HIGH-FREQUENCY FIELD

A. PERETIATKO^{1*}, A. KOVALEV^{2,3}

¹ Department of Physics, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, UKRAINE

² Department of Theoretical Physics, B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, UKRAINE

³ Department of Physics, V. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, UKRAINE

ABSTRACT This paper analyses the nonlinear steady-state excitation of a easy-axis ferromagnet of a finite size in the presence of a localised, high-frequency external field. The theoretical analysis was carried out using a one-dimensional system described by the non-linear Schrödinger equation. The dependencies of the excitation's dynamic parameters on the parameters of the external influence were determined. A classification of all steady-state (single-frequency) states that can be excited in the system under consideration has been done. In particular, the dependence of the amplitude and norm of the steady-state solutions on the amplitude of the external field was analysed for various field frequencies and chain lengths. The presence of a direct field influence on the system leads at low excitation levels, to the emergence of localised steady-state states. These states can only exist at frequencies lying below the frequency of homogeneous ferromagnetic resonance. Consequently, the states with the lowest energy values correspond to local quasi-linear modes that are localised in the region where the external field is applied. Quasi-soliton states will also arise, localised near the free boundary. At higher levels of system excitation, spatially periodic states arise in the form of nonlinear standing waves (cnoidal waves). Two limiting cases were considered. In a "long" system, the norm of the solutions depends on the external field amplitude at low excitation levels, as it does for stationary soliton-like states in an infinitely long system. At low excitation levels, a "short" system is similar to an oscillator in a nonlinear resonance. The results obtained show that, for a given external field frequency, steady-state solutions corresponding to different types of excitations exist only within certain field amplitude value intervals, the width of which depends on the chain length.

Keywords: easy-axis ferromagnet; localised field; nonlinear resonance; solitons; local modes; nonlinear standing waves

Вступ

Останнім часом зростає кількість експериментальних та теоретичних досліджень у фізиці магнітних явищ, спрямованих на вивчення

колективних збуджень магнітного порядку – спінових хвиль – та їх взаємодії з магнітним середовищем [1–3]. Однією з основних переваг використання спінових хвиль у магнотних пристроях є відсутність протікання електричного струму під час їх

поширення, що робить їх перспективними для створення енергоефективних функціональних елементів і систем обробки інформації.

На основі досліджень спінових хвиль сформувався окремий науковий напрям – магنونіка, який поєднує фундаментальні та прикладні аспекти фізики магнетних матеріалів і спрямований на реалізацію магнетних пристроїв для передачі та обробки сигналів [2-4]. Одним із ключових матеріалів магنونіки є залізо-ітрієвий гранат (ЗІГ), що характеризується малими магнетними втратами, високою однорідністю параметрів (динамічних магнетних характеристик) та можливістю отримання високоякісних тонких плівок [1,5-7]. Використання тонких плівок ЗІГ дозволило реалізувати широкий спектр магнетних елементів, зокрема хвилеводи, резонатори, магнетні кристали та лінії затримки, у яких здійснюється керування амплітудою, фазою та спектральними характеристиками спінових хвиль [7-10]. Значний прогрес досягнуто в експериментальних дослідженнях підсилення спінових хвиль у вузьких ЗІГ-хвилеводах та вивченні когерентної взаємодії магнетних мод, у тому числі в нульовому зовнішньому магнетному полі (тобто без прикладеного постійного і однорідного зовнішнього поля) за рахунок просторово локалізованого параметричного впливу (локальне збудження спінових хвиль через змінне магнетне поле або мікроскопічні антени) [5,11,12].

Важливим прикладним напрямом магنونіки є передача та обробка інформації з використанням спінових хвиль у протяжних магнетних структурах. У тонких плівках ЗІГ експериментально реалізовано інтерференційні та логічні елементи, а також магнетні лінії передачі з малими втратами, що відкриває перспективи створення інтегрованих магнетних мереж [13-15]. Ключовим фактором практичної реалізації таких пристроїв є ефективне поширення спінових хвиль у вузьких і довгих ЗІГ-хвилеводах, які відповідають геометрії реальних магнетних елементів [16,17]. Дослідження поширення спінових хвиль у таких структурах виконуються з використанням мікрофокусованої BLS-мікроскопії – експериментального методу, що забезпечує просторово та спектрально роздільне вимірювання амплітуди й частоти спінових хвиль з мікронною та субмікронною роздільною здатністю. Отримані результати демонструють збереження когерентності магнетних сигналів і низькі втрати навіть у хвилеводах субмікронної ширини [16,17,10]. Додаткові можливості керування спектром і поширенням спінових хвиль досягаються шляхом введення локальних магнетних неоднорідностей та спрощених або контрольованих геометрій хвилеводів, що дозволяє реалізовувати відбиття, локалізацію та кероване збудження і поширення окремих магнетних мод [10,12].

Теоретичні роботи та експериментальні дослідження показали, що нелінійні ефекти суттєво

впливають на спектр та просторову еволюцію спінових хвиль, зокрема на формування магнетних солітонів та нелінійну взаємодію магнетних мод при підвищених рівнях збудження. Експериментальні роботи демонструють утворення послідовності спінових хвиль у ЗІГ-плівках [18] і нелінійну генерацію коротких спінових хвиль через чотирьоххвильову взаємодію в нанохвилеводах [19], а також показують механізм формування солітонів у магнетних тонких плівках [20]. У роботі [21] теоретично показано, що прямий локалізований резонансний вплив на магнетно впорядковану систему необмеженої довжини призводить до збудження солітоноподібних стаціонарних станів, локалізованих в області прикладення зовнішнього поля. Також досліджено вплив загасання на структуру цих збуджень.

Таким чином, численні експериментальні дослідження поширення та підсилення спінових хвиль у вузьких і протяжних плівках ітрієво-залізного граната створюють основу для подальших, у тому числі теоретичних, досліджень динаміки, зокрема нелінійної динаміки, магнетовпорядкованих систем з метою використання спінових хвиль у різних прикладних задачах.

У даній роботі теоретично досліджується нелінійна динаміка одновимірної магнетовпорядкованої системи кінцевої довжини за умов прямого впливу просторово локалізованого зовнішнього поля. Основну увагу приділено формуванню стаціонарних нелінійних збуджень та впливу скінченності системи на їх просторову структуру.

Мета роботи

Оскільки в експериментах [5,10-12,16,17] вивчалися вузькі і довгі смужки залізо-ітрієвого гранату, теоретичний розгляд проводиться в межах одновимірної моделі, що описується нелінійним рівнянням Шредінгера (НРШ). У разі класичного розгляду феромагнетика з одноіонною анізотропією типу «легка вісь» динаміка намагнетченості в довгохвильовому наближенні без урахування загасання описується рівнянням Ландау-Ліфшица [24]

$$\frac{\hbar}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + I \left[\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} \right] + \beta [\mathbf{Me}] (\mathbf{Me}) = 0, \quad (1)$$

де \mathbf{M} – вектор намагнетченості, I – константа обмінної взаємодії, β – константа одновісної анізотропії вздовж напрямку з одиничним вектором \mathbf{e} . При малих рівнях збудження для комплексної величини $\psi = M_x + iM_y$ рівняння (1) зводиться до НРШ

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \omega_0 \psi + |\psi|^2 \psi = 0, \quad (2)$$

де знак «+» при нелінійному доданку відповідає фокусуєчій нелінійності (тяжінню між магнонами). Рівняння (2) записано в безрозмірному вигляді з заміною часу на безрозмірний час $t\omega_0$ з частотою однорідного феромагнітного резонансу $\omega_0 = 2\mu_0 M_0 \beta / \hbar$ (μ_0 – константа Бора і M_0 – номінальна намагніченість). Але ми залишили позначку ω_0 для характеристики границі спектру магنونів, хоча тепер $\omega_0 = 1$.

При цьому вихідна координата x замінена на безрозмірну координату x/l з «магнітною довжиною» $l = a\sqrt{I/\beta}$ і міжатомною відстанню a). В лінійному наближенні рівняння (2) в системі необмеженої довжини область $\omega > \omega_0$ відповідає лінійним спіновим хвилям виду $\psi \sim \exp(ikx - i\omega t)$ із законом дисперсії $\omega(k) = \omega_0 + k^2$. В області $\omega < \omega_0$ розв'язки, що задовольняють умові обмеженості на нескінченності, відсутні. При розгляді системи кінцевого розміру L ($L = ma/l$, де m – число елементів ланцюжка) рівняння (2) має бути доповнено граничними умовами: $(\partial\psi/\partial x)|_{0,L} = 0$, які відповідають вільним кінцям феромагнітного ланцюжка. У цьому випадку в області $\omega > \omega_0$ розв'язки рівняння (2) мають вигляд стоячих хвиль, спектр яких при малих збудженнях такий: $\omega = \omega_0 + (\pi n/L)^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (оскільки загальна кількість розв'язків дорівнює кількості незалежних станів ланцюжка, то n обмежене значенням m або, що теж саме, значенням L , це призводить до того, що величина ω має не тільки нижню межу, але і верхню $\omega_{\max}/\omega_0 = 1 + (2l/a)^2$). В області $\omega < \omega_0$ лінійних розв'язків, що задовольняють заданим граничним умовам, немає. При $\omega < \omega_0$ як в нескінченній системі, так і в системі кінцевої довжини, розв'язки, що задовольняють всім вище зазначеним умовам, можуть існувати тільки при врахуванні нелінійності.

Надалі ми будемо розглядати випадок, коли до легковісного феромагнетика у вузькій області простору прикладено змінне зовнішнє циркулярне магнітне поле, що обертається в площині, перпендикулярній напрямку легкої осі, тобто випадок прямого (не параметричного) впливу на систему. За наявності зовнішнього локалізованого поля НРШ можна представити в такому вигляді

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \omega_0 \psi + |\psi|^2 \psi = h e^{-i\omega t} \delta(x), \quad (3)$$

де $h > 0$, ω – амплітуда і частота зовнішнього змінного поля, область локалізації якого замінена δ -функцією (у прийнятому δ -функціональному розгляді область прикладення зовнішнього поля є

величиною порядку l , у безрозмірних змінних – порядку величини одиниці).

У випадку системи необмеженої довжини з точковим накачуванням однорідне рівняння (3) повинно бути доповнено граничною умовою наступного виду $(\partial\psi/\partial x)|_{+0} - (\partial\psi/\partial x)|_{-0} = h \exp(-i\omega t)$.

В лінійному наближенні область $\omega > \omega_0$ відповідає біжучим хвилям, що поширюються в обидва боки ($x > 0$, $x < 0$) від точки накачування ($x = 0$). При цьому частота хвилі збігається з частотою зовнішнього поля: $\psi_{\pm} = (h/2k) \exp[i(-\omega t \mp kx + \pi/2)]$,

а фаза хвилі в точці накачування відрізняється від фази зовнішнього поля на $\pi/2$. В області $\omega < \omega_0$, на відміну від просторово однорідного випадку (2), в якому розв'язки в лінійному наближенні з кінцевою амплітудою відсутні, при наявності зовнішнього поля існують локалізовані стаціонарні стани виду $\psi_{\pm} = (h/2\varepsilon) \exp[-i(\omega t + \pi) \mp \varepsilon x]$ з $\varepsilon = \sqrt{\omega_0 - \omega}$.

Різниця фаз обертання вектора намагніченості в точці накачування і зовнішнього поля дорівнює π . При розгляді системи кінцевої довжини рівняння (3), крім умови на границі $x = 0$: $(\partial\psi/\partial x)|_0 = (h/2) \exp(-i\omega t)$,

повинно бути доповнено умовою на вільній межі $(\partial\psi/\partial x)|_L = 0$, де L – довжина ланцюжка. Рівняння (3) в лінійному наближенні має просторово періодичні розв'язки, яким відповідає область $\omega > \omega_0$, у вигляді стоячих хвиль:

$$\psi = \left\{ \frac{h}{2} \left[2\kappa \sin(\kappa L) \right] \right\} \exp(-i\omega t) \cos[\kappa(x-L)], \quad \text{де}$$

$\kappa = \sqrt{\omega - \omega_0}$, і в яких фаза обертання вектора намагніченості в точці накачування може збігатися з фазою зовнішнього поля, або відрізнятися від неї на π . Також є розв'язки, що відповідають просторово локалізованим станам:

$$\psi = \left[\frac{h}{2} \varepsilon \operatorname{sh}(\varepsilon L) \right] \exp(-i\omega t - i\pi) \operatorname{ch}[\varepsilon(x-L)]$$

частоти яких лежать нижче ω_0 , у яких вектор намагніченості в точці накачування обертається в протифазі із зовнішнім полем.

Як показано в роботах [23,24], наявність локалізованого впливу на магнітовпорядковану систему призводить до виникнення в цій системі стаціонарних збуджень, пов'язаних з точкою прикладення зовнішнього поля. Дана робота присвячена теоретичному розгляду всіх можливих стаціонарних станів, при наявності прямого резонансного впливу на систему, динаміка якої може бути описана рівнянням (3).

Результати

Будемо розглядати тільки стаціонарні розв'язки, тобто розв'язки виду:

$$\psi(x, t) = u(x) \exp(-i\omega t), \quad \text{де } \omega \text{ – частота зовнішнього}$$

поля. За відсутності загасання величину $u(x)$ можна вважати дійсною, тоді, враховуючи вищевказану заміну змінних, від рівняння (3) прийдемо до рівняння в звичайних змінних з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \varepsilon^2 u + u^3 = h\delta(x). \quad (4)$$

Оскільки розглянуті нижче стаціонарні стани існують тільки при частотах зовнішнього поля $\omega < \omega_0$, в рівняння введено параметр $\varepsilon = \sqrt{\omega_0 - \omega}$.

Нижче буде проведена класифікація всіх можливих стаціонарних станів в рамках запропонованої моделі при врахуванні кінцевої довжини системи.

Перед тим як перейти безпосередньо до обговорення основних результатів, зупинимось коротко на стаціонарних локалізованих станах солітонного типу, зв'язаних із точкою прикладення зовнішнього поля, які можуть виникати в системі необмеженої довжини.

1. Нелінійні стаціонарні локалізовані стани в системі нескінченної довжини

Відзначимо насамперед, що за відсутності зовнішнього впливу в просторово однорідному випадку рівняння (3) допускає стаціонарні локалізовані розв'язки, для яких функція $u(x)$ має вигляд нерухомого солітону

$$u(x) = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\text{ch}(\varepsilon x - z)} e^{i\phi}. \quad (5)$$

У цьому виразі фаза ϕ і координата z центру солітона є довільними константами (частота ω є довільним параметром, але при цьому $\omega < \omega_0$). На фазовій площині однорідного рівняння (4) розв'язку (5) відповідає сепаратрисна крива, що розділяє фазові траєкторії двох різних типів розв'язків (рис. 1).

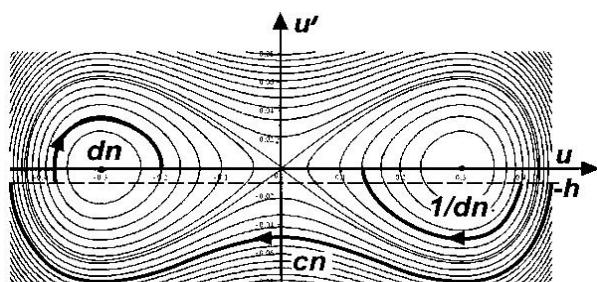


Рис. 1 – Фазовий портрет системи з виділеними фазовими траєкторіями для магнетика кінцевої довжини з накачуванням на границі

При наявності зовнішнього впливу в точці $x = 0$ рівняння (4) в областях $x > 0, x < 0$ зводиться до однорідного рівняння

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \varepsilon^2 u + u^3 = 0, \quad (6)$$

яке має бути доповнено наступною граничною умовою

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_0 = \frac{h}{2}, \quad (7)$$

Розв'язки (йдеться тільки про просторово локалізовані розв'язки) рівняння (6) можуть бути представлені, враховуючи рівність (5), у вигляді

$$u(x) = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\text{ch}(\varepsilon x \mp z)} e^{i\phi}, \quad x \neq 0, \quad (8)$$

де параметри ϕ , який визначає фазу обертання вектора намагніченості відносно фази зовнішнього поля, і z вже не є довільними, а набувають певні значення, які визначаються з умови (7). У роботі [24] показано, що при наявності точкового накачування в розглянутій системі можуть існувати локалізовані збудження солітонного типу чотирьох різних видів (A, B, C, D). Профілі цих розв'язків представлені на рис. 2. При малих значеннях амплітуди h зовнішнього поля розв'язок (A) – малоамплітудний (квазілінійний). Розв'язки (B, C) близькі до солітонних розв'язків (5) в просторово однорідній системі. Розв'язку (D) відповідають два солітони, розташовані симетрично відносно початку координат на великій відстані один від одного (відстань між центрами солітонів необмежено зростає при $h \rightarrow 0$). При цьому, розв'язки (A, B) відповідають станам, в яких фаза обертання вектора намагніченості відрізняється від фази зовнішнього поля на π . Розв'язки (C, D) описують стани, в яких вектор намагніченості обертається у фазі із зовнішнім полем. Величина z для всіх перелічених вище солітонних збуджень повністю визначається параметрами зовнішнього впливу і може бути записана (для розв'язків на двох піввісях) у вигляді

$$z_{(A,B)}^{(D,C)} = \pm \text{Arth} \left(\frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - s^2}}}{\sqrt{2}} \right), \quad (9)$$

де $s = h/h_c, h_c = \varepsilon^2\sqrt{2}$.

Функція (8) разом із співвідношеннями (9) являє собою точний розв'язок, що відповідає всім можливим локалізованим стаціонарним станам, які можуть виникати в розглянутій системі при наявності точкової прямої накачки. З виразів (9) випливає, що стаціонарні стани (8) існують тільки в області параметрів зовнішнього впливу, що задовольняють умові $0 \leq h \leq \varepsilon^2\sqrt{2}$, яка, своєю чергою, накладає деякі обмеження як на амплітуду, так і на частоту зовнішнього поля. Так, при фіксованій частоті ω зовнішнього накачування всі допустимі значення

амплітуди h , при яких можуть існувати стаціонарні локалізовані стани, обмежені величиною $h_c = \varepsilon^2 \sqrt{2}$. В області зовнішніх параметрів $h > h_c$ можуть існувати нестационарні двочастотні розв'язки, хаотичні збудження, а також просторово періодичні розв'язки у вигляді стоячих хвиль (останні будуть розглянуті нижче). Зазначимо, що умова, при якій може бути застосований перехід до довгохвильового наближення, можна представити як $\Delta \gg l$, де Δ – область локалізації збудження. Після переходу до безрозмірних змінних остання нерівність набуває вигляду $\Delta \gg 1$. Оскільки область локалізації солітонних збуджень обернено пропорційна амплітуді, яка в цьому випадку дорівнює $\varepsilon \sqrt{2}$, умова переходу до довгохвильового наближення набуває вигляду $\varepsilon \ll 1$ або, зважаючи на вище сказане, $h \ll 1$, що передбачалося спочатку, оскільки рівняння (3) є малоамплітудною границею рівняння (1).

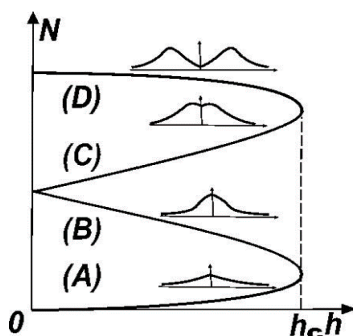


Рис. 2 – Залежність норми локалізованих станів від амплітуди зовнішнього поля в системі необмеженої довжини

Як правило, інформація про динаміку системи за наявності зовнішнього поля подається у вигляді залежності модуля амплітуди розв'язку $|\psi|$ від амплітуди і частоти зовнішнього поля. Замість модуля амплітуди іноді також розглядають саму амплітуду в точці накачування як функцію параметрів зовнішнього впливу (h, ω) . Крім амплітуди, використовуються також інтегральні характеристики такі, як норма розв'язку $N(h, \omega) = \int |\psi|^2 dx$, що визначає повне число елементарних збуджень в системі, або повна енергія. Слід зазначити, що у просторово однорідному випадку за відсутності зовнішнього поля рівняння (3) в нескінченній системі є повністю інтегрованим і має нескінченний набір інтегралів руху, до яких входять норма і повна енергія. При наявності точкового накачування в загальному випадку повне число квазічастинок (приплив квазічастинок внаслідок накачування) в системі та повна енергія (через часову неоднорідність) не зберігаються. Однак, в розглянутому окремому випадку стаціонарних розв'язків енергія і норма залишаються постійними в

часі величинами. За таких умов в якості характеристики стаціонарного стану більш зручно використовувати норму розв'язку: при малому ε , що є умовою переходу до довгохвильового наближення, для енергії маємо вираз $E(h, \omega) = \omega_0 N(h, \omega) + O(\varepsilon^3)$.

Це співвідношення, зокрема, має місце для системи кінцевої довжини. Залежність норми від параметрів зовнішнього поля може бути представлена у вигляді

$$\begin{aligned} N_{A,B} &= 2\sqrt{2}\varepsilon \left[\sqrt{2} - \sqrt{1 \pm \sqrt{1-s^2}} \right], \\ N_{C,D} &= 2\sqrt{2}\varepsilon \left[\sqrt{2} + \sqrt{1 \mp \sqrt{1-s^2}} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

На рис. 2 наведена залежність $N(h)$ – норми як функції амплітуди зовнішнього поля, оскільки в експериментах, як правило, змінюють амплітуду h зовнішнього поля при фіксованому значенні частоти ω . Тому тут і далі будь-яка характеристика буде вважатися функцією амплітуди h , при цьому ω та відповідно ε , розглядаються як задані параметри. Відповідні асимптотики при малих полях h мають вигляд: $N_A \approx h^2/4\varepsilon^3$, для протифазного «квазілінійного» розв'язку, $N_{B,C} \approx 4\varepsilon(1 \mp h/2\sqrt{2}\varepsilon^2)$, для двох «квазісолітонних» розв'язків і $N_D \approx 8\varepsilon - h^2/4\varepsilon^3$ для «двосолітонного» розв'язку. При $h \rightarrow 0$ розв'язки (B,C) переходять в односолітонний розв'язок з нормою $N = 4\varepsilon$, розв'язок (D) – в два солітони, що рознесені на нескінченну відстань один від одного, а норма, відповідно, дорівнює $N = 8\varepsilon$. При полях, близьких до гранично можливого значення h_c (в самій точці $h = h_c$ функція $N(h)$ має вертикальну похідну) для асимптотик мають місце наступні вирази: $N_{A,B} \approx 2\varepsilon(2 - \sqrt{2} \mp \delta^{1/2})$ – для протифазних станів і $N_{C,D} \approx 2\varepsilon(2 + \sqrt{2} \mp \delta^{1/2})$ – для синфазних. В останніх співвідношеннях введено позначення $\delta = (h_c - h)/h_c \ll 1$. У роботі [24] в межах методу колективних змінних проведено аналіз стійкості розглянутих вище розв'язків. Виявилось, що розв'язки (B) і (D) є нестійкими при всіх допустимих значеннях амплітуди h зовнішнього поля, розв'язок (A) – стійкий на всьому інтервалі $[0, h_c]$, розв'язок (C) є стійким лише в малій околиці точок $h = 0$ і $h = h_c$.

2. Стаціонарні стани з частотами в системі кінцевої довжини

Спочатку коротко зупинимося на випадку системи кінцевої довжини з частотами $\omega < \omega_0$ за відсутності зовнішнього поля, коли однорідне рівняння (4) доповнене граничними умовами $u'_{0,L} = 0$. Він

допускає лише розв'язки, яким відповідають фазові траєкторії, розташовані «всередині» і «зовні» сепаратрисних кривих $u' = u\sqrt{\varepsilon^2 - u^2/2}$ (рис. 1). Розв'язки першого типу («всередині» сепаратрис) мають вигляд [22]

$$u = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{p} \operatorname{dn}\left(\frac{\varepsilon x}{p}, k\right), p = \sqrt{2-k^2}, \quad (11)$$

де параметр ε визначається рівністю $\varepsilon = [mK(k)/L]p$, $m = 1, 2, \dots, n$, $K(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду і k – модуль еліптичного інтегралу. З останньої рівності, зокрема, випливає, що при заданому L загальна кількість розв'язків визначається співвідношенням $n = L\sqrt{2\omega_0}/\pi$.

При наявності зовнішнього локалізованого поля рівняння (6), крім умови (7), повинно бути доповнено умовою на вільній межі

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_L = 0. \quad (12)$$

У цьому випадку розв'язок (11) зручно записати окремо у вигляді функцій

$$u^{(1)} = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{p} \operatorname{dn}\left(\frac{\varepsilon(x-L)}{p}, k\right), \quad (13)$$

$$u^{(2)} = \frac{\varepsilon k' \sqrt{2}}{p} \operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{\varepsilon(x-L)}{p}, k\right), k' = \sqrt{1-k^2}, \quad (14)$$

з максимумом (розв'язки (13)) і з мінімумом (14) на вільній межі (в точці $x = L$). В залежності від значень параметру k функції (13) та (14) описують як просторово локалізовані стани типу солітонних розв'язків (8), так і просторово періодичні збудження, які відповідають нелінійним стоячим хвилям. Зокрема, при значеннях k близьких до одиниці розв'язок (14) відповідає збудженню, що локалізоване в малій околиці точки прикладення зовнішнього поля. Своєю чергою функція (14) при $k \approx 1$ описує збудження, що локалізоване у вузькій області поблизу вільної межі: при цьому $u^{(1)}(L) \gg u^{(1)}(0)$. Значимо також, що при $k = 1$ маємо: $u^{(2)} = 0$, $u^{(1)} = \varepsilon\sqrt{2}/\operatorname{ch}[\varepsilon(x-L)]$ (останнього розв'язку в просторово однорідному випадку при відсутності зовнішнього поля не існує). Сам параметр k , при заданих ε та L , визначається тільки значеннями амплітуди h зовнішнього поля: $k = k(h)$. Умова (7) дає зворотну залежність $h(k)$, яка для розв'язків (14) і (15) має наступний вигляд

$$h^{(1)}(k) = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon^2 k^2}{p^2} \operatorname{sn}(z, k) \operatorname{cn}(z, k), \quad (15)$$

$$h^{(2)}(k) = -\frac{2\sqrt{2}\varepsilon^2 k' k^2}{p^2} \frac{\operatorname{sn}(z, k) \operatorname{cn}(z, k)}{\operatorname{dn}^2(z, k)}, \quad (16)$$

де введено позначення $z = \Lambda/p$, $\Lambda = \varepsilon L$. Для норми розв'язків (14) та (15) мають місце наступні співвідношення

$$N^{(1)}(k) = \frac{2\varepsilon}{p} E(\operatorname{am} z), \quad (17)$$

$$N^{(2)}(k) = \frac{2\varepsilon}{p} \left[E(\operatorname{am} z) - k^2 \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z} \right], \quad (18)$$

де $E(\operatorname{am} z)$ – неповний еліптичний інтеграл другого роду та $\operatorname{am}(z) = \operatorname{am}(z, k)$ – еліптична амплітуда. Формули (17) і (18) спільно з (15) та (16) визначають залежності $N^{(1,2)}(h)$, які задані в параметричному вигляді (рис. 3). Варто зауважити, що амплітуда h із самого початку вважалася величиною додатною, але у випадку системи кінцевої довжини зручніше розглядати її формально як величину алгебраїчну. Так, з кожної точки $N_0^{(m)} = N^{(1,2)}(h=0)$, $m = 1, 2, \dots, n$ на рис. 3, де $n = L\sqrt{2}/\pi$ – кількість коренів функції (15), виходять дві гілки $N^{(1,2)}(h)$, які відповідають синфазним ($h > 0$) і протифазним ($h < 0$) розв'язкам (13) та (14), тобто таким, в яких намагніченість на межі прецесує в фазі і в протифазі з зовнішнім полем.

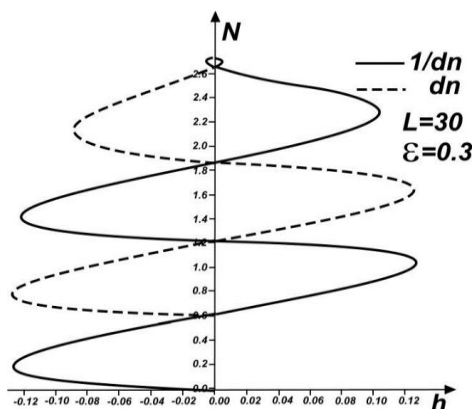


Рис. 3 – Залежність норми розв'язків (13) та (14) від амплітуди зовнішнього поля

З рис. 3 видно, що для кожної пари синфазних і окремо протифазних гілок, які виходять з двох сусідніх точок з $h = 0$ і $N_0^{(m)}$, існує своє певне значення $h_c^{(1,2)}$ амплітуди зовнішнього поля, яке є аналогом величини h_c , що виникає в системі необмеженої довжини. $h_c^{(1,2)}$ визначає межу інтервалу всіх допустимих значень h для стаціонарних збуджень різного типу. При кожній заданій довжині L , амплітуда зовнішнього поля набуває $n-1$ значення $h_c^{(1)}$ для норми $N^{(1)}(h)$ і n значень $h_c^{(2)}$ для $N^{(2)}(h)$. Значимо, що величини $h_c^{(1,2)}$ є ординатами точок екстремумів функцій

$h^{(1,2)}(k)$, що визначаються співвідношеннями (15) та (16). При обчисленні повної похідної від функцій (13) і (14) за змінною k можна отримаємо наступні співвідношення:

$$\frac{4k'^2}{p^2} \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z + (1 - 2\operatorname{sn}^2 z) \times \left\{ \left[\alpha(k)k'^2 + \beta(k) \right] \operatorname{dn} z + k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z \right\} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{4k'^2}{p^2} \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z + \frac{\left[(1 - 2\operatorname{sn}^2 z) \operatorname{dn}^2 z + 2k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{cn}^2 z \right]}{\operatorname{dn} z} \times \left\{ \alpha(k)k'^2 + \beta(k) \right\} = 0, \quad (20)$$

де $\alpha(k) = \varepsilon L k^2 / p^{3/2}$, $\beta(k) = k'^2 z - E(\operatorname{am} z)$, які слід розглядати як рівняння для знаходження модуля k . Значення $k = k_*$, що задовольняють даним рівнянням, будуть абсцисами точок екстремумів функцій (15) і (16). Незважаючи на громіздкий вигляд рівнянь (19) і (20), наближений розв'язок для значень k_* близьких до одиниці, що своєю чергою відповідає умові $\Lambda \gg 1$, знаходиться досить просто. Так, при $k \approx 1$ ($k' \ll 1$), можна залишити у кожному з рівнянь основний доданок (зазначимо, що в розглянутому випадку основний внесок у похідну дають доданки, що отримані при диференціюванні еліптичних функцій за змінною k , як по другому аргументу), і прийти до таких умов: $\operatorname{sn} z_* = \pm 1/\sqrt{2}$ – з рівняння (19), $\operatorname{sn} z_* = \pm 1/\sqrt{1+k_*'^2}$ – з рівняння (20), де $z_* = z(k_*)$. З останніх виразів можна отримати для величини k'_* такі співвідношення: $k'_* \approx 4 \exp[-(\Lambda \pm \mu)/m]$, $\mu \approx 0,88$. Після чого для критичних значень $h_c^{(1,2)}$ функцій (15) та (16) будемо мати: $h_c^{(1,2)} \approx \pm h_c (1 - 32 \exp[-2(\Lambda \pm \mu)/m])$, де парні значення m відповідають $h_c^{(1)}$, непарні – $h_c^{(2)}$ (в отриманих асимптотиках: знак перед μ збігається зі знаком перед h_c – для $h_c^{(1)}$; верхній знак перед h_c відповідає нижньому знаку перед μ і навпаки – для $h_c^{(2)}$). Зазначимо, що кореням функцій $h^{(1,2)}(k)$, при значеннях k , близьких до одиниці, відповідають значення $k'_0 \approx 4 \exp(-\Lambda/m)$. Тобто знакам « \pm » у записаній вище наближеній рівності для $h_c^{(1)}$ відповідають два значення k'_* , що лежать по обидва боки від k'_0 з парним номером m , а у рівності для $h_c^{(2)}$ – з непарним номером m . Відносна відстань між двома сусідніми точками екстремуму з однаковим

значенням m : $\delta k'_* = \Delta k'_*/k'_0 \sim 1$. Слід також зазначити, що до записаних вище асимптотик формально можна прийти, використовуючи умову $u''(0) = 0$, однак, на відміну від системи нескінченної довжини, де остання умова призводить до точного значення h_c , в системі кінцевого розміру вона призводить лише до наближеного виразу для $h_c^{(1,2)}$ і тільки при значеннях $k \approx 1$. З наближених виразів для $h_c^{(1,2)}$ видно, що для $\Lambda \gg 1$ і $k \approx 1$, що відповідають невеликим значенням m , величини $|h_c^{(1,2)}|$ будуть розташовані в малій околиці точки h_c , а при необмеженому зростанні L будуть асимптотично наближатись до цього значення.

Перейдемо далі до розгляду виразів (17) і (18), які визначають норму розв'язків (14) та (15). Лінія $N^{(1)}(h)$ при $\Lambda \gg 1$ виходить з точки $h^{(1)} \approx 4\sqrt{2}\varepsilon^2 \exp(-\Lambda)$, $N^{(1)} \approx 2\varepsilon$, а крива $N^{(2)}(h)$ – з початку координат. Цим значенням відповідає значення $k = 1$. В точках $h^{(1,2)} = 0$ норма $N^{(1,2)}$ набуває значення $N_0^{(m)} = 2m\varepsilon E(k)/p$, $m = 1, 2, \dots, n$, де $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду. Зокрема, в точці $k = 0$ маємо: $N_0^{(n)} = \varepsilon\Lambda$. При $k \approx 1$ для асимптотик критичних значень норми ($h = h_c^{(1,2)}$) мають місце такі співвідношення $N_c^{(1,2)} \approx 2\varepsilon \left\{ m \pm (1/\sqrt{2}) + 8\Lambda \exp[-2(\Lambda \pm \mu)/m] \right\}$. В цих виразах парному значенню номера m відповідають $N_c^{(1)}$, непарному m – $N_c^{(2)}$; для точок, в яких $h^{(1,2)} = 0$, також матимемо $N_0^{(m)} \approx 2\varepsilon [m + 8\Lambda \exp(-2\Lambda/m)]$. З наведених вище виразів видно, що при умові $\Lambda \gg 1$ для невеликих значень m розташування критичних точок функцій $N^{(1,2)}(h)$ близько до симетричного відносно відповідних точок $N_0^{(m)}$. При цьому, розташування самих точок $N_0^{(m)}$ буде близьким до еквідістантного. Зазначимо також, що чотирьом першим гілкам функцій $N^{(2)}(h)$ відповідають стаціонарні стани, які є аналогами локалізованих збуджень, що виникають в системі нескінченної довжини. Для квазілінійного стану при малих полях в цьому випадку асимптотики мають вигляд $N \approx h^2/8\varepsilon^3$, що якісно збігається з розв'язком (А). Крім цього, при $L \rightarrow \infty$ асимптотично $N_0 \rightarrow 2\varepsilon = N_s/2$, якщо номер $m = 1$ і $N_0 \rightarrow 4\varepsilon = N_s$, якщо $m = 2$ де N_s – норма солітонного розв'язку. Для критичних значень норми матимемо $N_c^{(2)} \rightarrow \varepsilon (2 \pm \sqrt{2}) = N_{(A,B)}^{(C,D)}/2$, де $N_{(A,B)}^{(C,D)}$ – критичні значення норми для пари гілок протифазних (нижній знак) та синфазних (верхній знак) розв'язків у нескінченній системі.

Повернемося до співвідношення $n = \Lambda\sqrt{2}/\pi$, що визначає кількість коренів рівняння (15). З нього випливає, що кожному заданому значенню n відповідає деяке критичне значення довжини системи: $L_c^{(n)} = \pi n / (\varepsilon\sqrt{2})$. Так, в інтервалі $(L_c^{(n)}, L_c^{(n+1)})$ кількість коренів залишається незмінним і рівним $n+1$. Появу нового кореня можна представити наступним чином: при переході L через значення $L_c^{(n)}$ з точки $k=0$ «виходить» новий $n+1$ -й корінь, який у міру наближення L до наступного критичного значення $L_c^{(n+1)}$ зміщується у бік точки $k=1$. Всі інші корені так само зміщуються до значення $k=1$, що випливає, зокрема, з наведених вище асимптотик. При переході L через критичне значення $L_c^{(n+1)}$ з'являється $n+2$ -й корінь тощо. Для значень L близьких до $L_c^{(n)}$ і значень $k \ll 1$, величини $h^{(1,2)}(k)$, при використанні Фур'є-перетворення для відповідних еліптичних функцій, можуть бути представлені в вигляді

$$h^{(1,2)}(k) \approx \pm (-1)^n 16\varepsilon^2 \Lambda \left\{ \gamma k + 4\gamma \left[2 \pm (-1)^n \kappa^2 \right] - 12\kappa^3 - 48 \left[6 \pm (-1)^n \right] \kappa^4 \right\} \quad (21)$$

Верхній знак відповідає функції (15), нижній – функції (16), у цій рівності $\kappa = k^2/16 \ll 1$, $\gamma = \Delta L / L_c^{(n)} \ll 1$, $\Delta L = L - L_c^{(n)}$. Для асимптотик критичних значень маємо наступні співвідношення: $\kappa_* \approx (\sqrt{\gamma} + 2\gamma/3)/6$, $h_c^{(1,2)} \approx -16\varepsilon^2 \Lambda (\gamma^{3/2} - 2\gamma^2/27)/9$, при непарному n ці значення відповідають функції (16), при парному n – функції (17) і $\kappa_* \approx (\sqrt{\gamma} + 2\gamma)/6$, $h_c^{(1,2)} \approx 16\varepsilon^2 \Lambda (\gamma^{3/2} + 2\gamma^2/27)/9$ – для величини $h^{(1)}$, якщо n – парне, величині $h^{(2)}$ – якщо непарне. Новому $(n+1)$ -у кореню відповідає значення $\kappa_0 \approx \sqrt{3}(\sqrt{\gamma} - 4\gamma/\sqrt{3})/6$. З записаних асимптотик видно, що величини κ_0 і κ_* нескінченно малі разом з ΔL , тобто при кожному переході L через критичне значення поява нового кореня відбувається безперервно. У відповідності до сказаного, поява нової точки $N_0^{(m)}$ і нових гілок функцій $N^{(1,2)}(h)$, що виходять з неї, відбувається тільки при переході довжини L через чергове значення $L_c^{(n)}$: в інтервалі між двома послідовними критичними значеннями L кількість точок $N_0^{(m)}$ залишається незмінною і рівною $n+1$. При малому ΔL і $k \ll 1$ величини $N^{(1,2)}(k)$ можуть бути представлені в такому вигляді

$$N^{(1,2)}(k) \approx \varepsilon \Lambda \left[1 - 16\kappa^2 - 256\kappa^3 \pm 8\kappa(-1)^n (\gamma - 12\kappa^2) \right], \quad (22)$$

де верхній знак відповідає $N^{(1)}$, нижній – $N^{(2)}$. При використанні останнього співвідношення для критичних значень будемо мати: $N_c^{(1,2)} \approx \varepsilon \Lambda (1 - 4\gamma/9 - 8\gamma^{3/2}/3)$. Це співвідношення відповідає значенню $N_c^{(1)}$, якщо номер n в рівності (23) непарний, і значенню $N_c^{(2)}$, якщо n – парний. Значення $N_c^{(1,2)} \approx \varepsilon \Lambda (1 - 4\gamma/9 - 56\gamma^{3/2}/27)$ відповідає $N_c^{(1)}$, якщо n – парне та $N_c^{(2)}$, якщо n – непарне. Поблизу точки $k=0$ також можемо записати $N^{(1,2)}(h) \approx \varepsilon \Lambda \pm |h|/2\varepsilon$. При цьому, якщо точки $N_0^{(n)} = \varepsilon \Lambda$ відповідає парне значення n , функція $N^{(1)}(h)$ наближається до цієї точки «знизу», а функція $N^{(2)}(h)$ – «зверху»; якщо ж номер n непарний, тоді навпаки. При кожному значенні $L = L_c^{(n)}$ криві $N^{(1,2)}$ «входять» в точку $\varepsilon^2 L_c^{(n)}$ з нульовою похідною.

Перейдемо до розгляду розв'язків другого типу, а саме, до розв'язків, фазові траєкторії яких лежать «зовні» сепаратрисної петлі на рис.1. У просторово однорідному випадку розв'язок, що задовольняє умовам на вільних межах, має вигляд [22]

$$u(x) = \frac{\varepsilon k \sqrt{2}}{g} \operatorname{cn} \left(\frac{\varepsilon x}{g}, k \right), \quad g = \sqrt{2k^2 - 1}, \quad (23)$$

де величина ε набуває значень $\varepsilon = (2mK(k)/L)g$, $m = 1, 2, \dots$. При наявності зовнішнього локалізованого поля, враховуючи умови (7) і (13), розв'язок (дивись (24)) можна записати так:

$$u(x) = \frac{\varepsilon k \sqrt{2}}{g} \operatorname{cn} \left(\frac{\varepsilon(x-L)}{g}, k \right), \quad (24)$$

де параметр ε залежить тільки від частоти зовнішнього поля. Залежність $h(k)$ визначається з умови (7) і має наступний вигляд:

$$h(k) = \frac{2\sqrt{2}\varepsilon^2 k}{g^2} \operatorname{sn}(y, k) \operatorname{dn}(y, k), \quad y = \varepsilon L / g. \quad (25)$$

Для норми розв'язків (25) маємо

$$N(k) = \frac{2\varepsilon}{g} [E(\operatorname{am} y) - k'^2 y]. \quad (26)$$

Вираз (26) разом з формулою (25) визначає залежність $N(h)$, що задана у параметричному

вигляді. Зауважимо, що крива $N(h)$ при кожному кінцевому значенні довжини L (рис. 4) матиме необмежену кількість гілок. При цьому самі значення амплітуди h і норми розв'язків будуть необмежено зростати по мірі наближення k до значення $1/\sqrt{2}$.

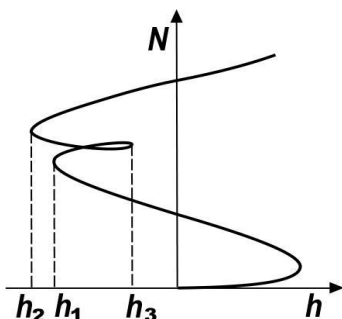


Рис. 4 – Залежність норми розв'язків (24) від амплітуди зовнішнього поля

Гілкам, розташованим найближче до початку координат, відповідають солітоноподібні збудження $k \approx 1$, що локалізовані у малій околиці вільної межі. При $k=1$ розв'язки (24) і (13) збігаються один з одним, крім того, збігаються й відповідні значення амплітуди h . Для амплітуди (25) зовнішнього поля, так само як і у випадку розв'язків, що були розглянуті вище, існують деякі критичні значення, яким відповідають корені повної похідної від функції (25) за змінною k , і які визначають межу всіх можливих значень h для кожної пари синфазних і окремо протифазних гілок функції $N(h)$. Для знаходження критичних значень, при використанні умови екстремуму, можна прийти до виразу

$$\begin{aligned} & [\alpha(k)k'^2 - k^2(1 - 2\text{sn}^2 y)] \text{sn} y \text{dn} y + \\ & + [\beta(k)k'^2 - \delta(k)](1 - 2k^2 \text{sn}^2 y) \text{cn} y = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{де } \alpha(k) = (2k^2 + 1)/g^2, \quad \beta(k) = 2\epsilon L k^2 / g^{3/2}, \\ \delta(k) = k'^2 y - E(\text{am} y).$$

Співвідношення (27) є рівнянням відносно змінної k . При $\Lambda \gg 1$ і значеннях k близьких до одиниці, тобто при низьких рівнях збудження системи, з рівняння (27) випливають такі умови: $\text{sn} y_* = \pm 1/(k_* \sqrt{2})$ і $\text{cn} y_* = 0$, де $y_* = y(k_*)$, k_* – координата точки екстремуму. З першої умови отримаємо співвідношення для величини k_*' : $k_*'^{(1,2)} \approx 4 \exp[-(\Lambda \pm \mu)/2m]$, $m=1,2,\dots$; з другої умови: $k_*'^{(3)} \approx 4 \exp[-\Lambda/(2m+1)]$. Для коренів (25) маємо: $k_0' \approx 4 \exp(-\Lambda/2m)$. Сама амплітуда зовнішнього поля в критичних точках набуває значень:

$$h_{1,2} \approx \pm h_c (1 + 32 \exp[-(\Lambda \pm \mu)/m]) \quad \text{і} \quad h_3 \approx \pm 8 h_c \exp[-\Lambda/(2m+1)].$$

У виразі для $h_{1,2}$ при $h < 0$ непарне m і нижній знак μ відповідають полю h_1 , парне m і верхній знак μ відповідають полю h_2 . Якщо $h > 0$, то парне m і нижній знак μ відповідають h_1 , а непарне m і верхній знак μ – значенню h_2 , при цьому завжди: $|h_1| < |h_2|$. Як видно з наведених асимптотик, для перших декількох гілок залежності $N(h)$, яким відповідають локалізовані «квазісолітонні» стани (25) із максимумом амплітуди на вільній межі, значення $|h_{1,2}|$ розташовані в малій околиці точки h_c . При $\Lambda \gg 1$ помітне відхилення амплітуди h від значення h_c буде супроводжуватись достатньо сильними збудженнями системи. Для самих значень величини $N(h)$ у вказаних вище точках можна прийти до таких співвідношень: при $h=0$ норма набуває значень $N_0^{(m)} = 4\epsilon m [E(k) - k'^2 K(k)]/g$, асимптотика останнього виразу при $k \approx 1$ може бути записана у вигляді $N_0^{(m)} \approx 4\epsilon [m - 4\Lambda \exp(-\Lambda/m)]$. Для норми розв'язків при критичних значеннях амплітуди поля h ми будемо мати $N_{1,2} \approx 2\epsilon (2m \pm 1/\sqrt{2} - 8\Lambda \exp[-(\Lambda \pm \mu)/m])$ у точках $h = h_{1,2}$. Ці значення розташовані майже симетрично відносно точок $N_0^{(m)}$ і $N_3 \approx 2\epsilon \{2m+1 - 8\Lambda \exp[-2\Lambda/(2m+1)]\}$ при значенні $h = h_3$. З записаних виразів видно відмінність величини (25) від залежностей (15) та (16): функція (25) між двома сусідніми коренями має три точки із нульовою похідною. У відповідності до цього норма $N(h)$ має дещо більш складний характер ніж залежності $N^{(1,2)}(h)$, які розглянуті вище. Так, при $\Lambda \gg 1$ і $k \approx 1$ величина h_3 буде експоненціально малою, тоді як значення $h_{1,2}$ мало відрізняються одне від одного. При цьому відстань між точками N_1 , N_3 і N_2 буде мати порядок величини ϵ . По мірі зменшення модуля k точка h_3 буде поступово наближатись до відповідних значень h_1 і h_2 , крім цього, відстань між точками N_1 та N_2 буде зменшуватись. Для величини (26) існує певне значення $k = \tilde{k}$ (залежне від Λ) таке, що при переході модуля k через значення \tilde{k} змінюється характер залежності $h(k)$, а саме, зникають дві точки екстремуму h_1 і h_3 . Відповідно до цього буде змінюватися і характер залежності $N(h)$: зникають точки N_1 і N_3 . Для достатньо великих значень Λ величину \tilde{k} можна записати у вигляді: $\tilde{k} \approx 1/\sqrt{2} + O(\Lambda^{-1})$ з $\Lambda \gg 1$, що своєю чергою

відповідає достатньо сильним збудженням системи: $N \sim \Lambda^2$, $h \sim \Lambda$. Зауважимо, що сама точка \tilde{k} з'являється при значеннях $\Lambda \sim 1$. Так, наприклад, при $\Lambda < 1$ функція (25) на всьому інтервалі значень k між кожними двома сусідніми коренями має лише одну точку екстремуму.

Обговорення результатів

Якщо в якості амплітуди поля h брати абсолютні значення (15), (16) та (25) для амплітуди зовнішнього поля, то при $\Lambda \gg 1$ динаміка системи матиме наступний характер: при безперервному зростанні амплітуди зовнішнього поля h (рис. 5) норма N розв'язків буде змінюватись стрибкоподібно, а безперервна зміна величини $N(h)$ буде відбуватись лише в інтервалах між кожними двома послідовними критичними значеннями h , про які мова йшла вище.

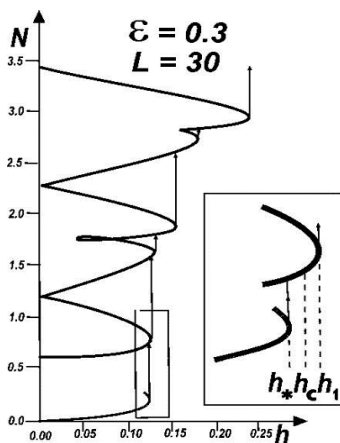


Рис. 5 – Залежність $N(h)$ для великої довжини системи з $\Lambda \gg 1$

Так, нижня гілка відповідає квазілінійним протифазним станам (14) і цій гілці зокрема відповідає мінімальна енергія. В точці $h_* \approx h_c \{1 - 32 \exp[-2(\Lambda + \mu)]\}$ відбувається стрибок на «квазісолітонну» гілку синфазних розв'язків (24), а при подальшому збільшенні амплітуди поля в точці $h_1 \approx h_c \{1 + 32 \exp[-(\Lambda + \mu)]\}$ маємо стрибок на сусідню протифазну гілку тощо. При кожному критичному значенні $h_{1,2}$ величина $N(h)$ здійснює стрибок на сусідню синфазну або протифазну гілку. Це залежить від знаку правої частини рівності (25), якої визначається h . При значеннях k близьких до одиниці (при низьких рівнях збудження системи) величина стрибків, як це було зазначено вище, буде приблизно однаковою $\Delta N \sim \epsilon$. Відносна зміна норми буде величиною порядку одиниці. Подібним чином буде поводитись й амплітуда розв'язків на вільній межі. Наприклад, для зміни амплітуди поля в точці першого стрибка в основному наближенні матимемо

значення поля $\epsilon\sqrt{2}$, однак, при цьому відносна зміна амплітуди буде досягати достатньо великого значення. Зі сказаного випливає, що малою зміною амплітуди зовнішнього поля можна досягти кінцевої зміни норми та амплітуди стаціонарних збуджень. Однак, з точки зору практичного застосування можуть виникнути складнощі, які пов'язані з тим, що при малих збудженнях системи критичні значення h розташовані досить близько одне до одного і відрізняються експоненціально малим доданком, що своєю чергою може призвести до неконтрольованої зміни динамічних параметрів системи.

Розглянемо далі випадок «малої» довжини системи, $\Lambda \ll 1$. Залежність $N^{(2)}(h)$ буде мати дві гілки (рис. 6), які відповідають протифазним квазілінійним і квазісолітонним станам (14).

Норма $N^{(1)}(h)$ матиме лише одну гілку, яка відповідає синфазним квазісолітонним станам (13). Остання у точці $h^{(1)} \approx 2h_c\Lambda$ безперервно переходить у аналогічну квазісолітонну гілку $N(h)$, що відповідає станам (24). Так, у точці стрибка (рис. 6) $h_* \approx 2h_c\Lambda\sqrt{2/3}/3$. Зазначимо, що в попередньому випадку величина $h^{(1)}$ є експоненціально малою величиною, й при цьому значення h_* і h_c мало відрізняються одне від одного. У випадку малої довжини критичне поле h_* буде найменшим серед всіх характерних значень h , тому матимемо: $N_* \approx \epsilon\Lambda/3$, $N^{(1)} \approx 2\epsilon\Lambda\sqrt{2/3}$, тобто величина стрибка ΔN буде мати порядок величини $\epsilon\Lambda$. При цьому відносна зміна норми, так само як і у попередньому випадку, буде величиною порядку одиниці. Для величини стрибка амплітуди на вільній межі в основному наближенні отримаємо $\epsilon/\sqrt{3}$, при цьому, на відміну від попереднього випадку, відносна зміна амплітуди буде величиною порядку одиниці. Слід відмітити, що у цьому випадку величина h_1 – точка другого стрибка розташована достатньо далеко від значення h_c . Це призводить до того, що стрибкоподібні переходи системи у більш високі енергетичні стани стають контрольованими. Крім того, на відносно широкому інтервалі значень h виконується умова: $h_c \ll h \ll 1$, $N \ll 1$. Це означає, що можна суттєво перевищити значення h_c , не порушуючи при цьому умови малоамплітудного наближення. Зазначимо також, що норма $N(h)$, що представлена на рис. 6, при малих збудженнях системи якісно збігається із аналогічною залежністю норми осцилятора (ізолюваного моменту) за умови нелінійного резонансу. Так, зокрема, величина стрибка амплітуди на вільній межі, мова про яку йшла вище, збігається із точним виразом для величини

стрибка амплітуди осцилятора. У випадку осцилятора для амплітуди поля в точці стрибка $h_c = 2\varepsilon^3 / (3\sqrt{3})$.

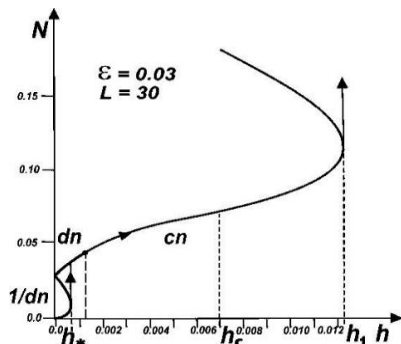


Рис. 6 – Залежність $N(h)$ для малої довжини системи з $\Lambda \ll 1$

Наприкінці розглянемо стаціонарні збудження типу (13) і (24) в системі необмеженої довжини. Зазначимо, що на відміну від локалізованих станів (8), просторово періодичним станам буде відповідати нескінченна норма та енергія. Так, для напівнескінченного ланцюжка замість виразів (13) і (15) маємо

$$u = A(k) \operatorname{dn} \left[\frac{A(k)x}{\sqrt{2}} - z, k \right], \quad (28)$$

$$h(k) = A^2(k) k^2 \sqrt{2} \operatorname{sn}(z, k) \operatorname{cn}(z, k).$$

A замість виразів (24) і (25) можемо записати, відповідно

$$u = A(k) \operatorname{cn} \left[\frac{A(k)x}{k\sqrt{2}} - z, k \right], \quad (29)$$

$$h(k) = \frac{A^2(k) \sqrt{2}}{k} \operatorname{sn}(z, k) \operatorname{dn}(z, k),$$

де z – довільне число. Величина $A(k)$ набуває значень $\varepsilon \sqrt{2} / \sqrt{2-k^2}$ і $\varepsilon k \sqrt{2} / \sqrt{2k^2-1}$, де перший вираз відповідає співвідношенням (28), а другий – (29).

У даному випадку в якості основної динамічної характеристики зручно використовувати величину u_0 – значення амплітуди в точці накачування. Виходячи з рівнянь (28) і (29), можна отримати співвідношення, що пов'язують змінні u_0 , h і k в такому вигляді:

$$u_0(k, h) = \pm \varepsilon \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \tilde{A}^4 - 2\tilde{A}^2 - \tilde{h}^2/2}},$$

$$\tilde{A} = A/\varepsilon, \quad \tilde{h} = h/\varepsilon^2.$$

тобто у вигляді рівняння двовимірної поверхні, кожен перетин якої площиною $k = \text{const}$, $A = A(k)$ являє собою виток просторової кривої $u_0(h)$. Для розв'язків (28) величина h в останньому співвідношенні набуває усіх значень в інтервалі $0 \leq |h| \leq h_c$; для розв'язків (29)

верхньому знаку в підкореному виразі відповідає інтервал $0 \leq |h| \leq h_2$, нижньому знаку – інтервал $h_1 \leq |h| \leq h_2$, де $h_1 = 2\sqrt{2}\varepsilon^2 k k' / (2k^2 - 1)$, $h_2 = \sqrt{2}\varepsilon^2 / (2k^2 - 1)$.

Висновки

В межах одновимірного нелінійного рівняння Шредінгера розглянуто динаміку легковісного феромагнетика в зовнішньому циркулярно поляризованому полі. Для випадку просторово локалізованого прямого резонансного впливу проведено класифікацію стаціонарних збуджень з урахуванням кінцевого розміру системи. Отримано в аналітичному вигляді залежність динамічних характеристик цих збуджень від параметрів зовнішнього поля. Зокрема отримано залежність норми стаціонарних станів від амплітуди зовнішнього поля. Проаналізовано на якісному рівні вплив довжини системи на просторову структуру стаціонарних збуджень і критичні значення амплітуди зовнішнього поля, які визначають межі існування станів різного типу. На прикладі залежності норми розв'язків від амплітуди зовнішнього поля $N(h)$ показано, що при кожному критичному значенні амплітуди поля h перехід системи з одного стану в інший здійснюється стрибком. При цьому величина стрибка суттєво залежить від параметру Λ , зв'язаному з довжиною системи. При кожному заданому значенні довжини L системи завжди можна підібрати таке значення параметру ε , пов'язаного з частотою зовнішнього поля, щоб малою зміною амплітуди зовнішнього поля можна було перевести систему в більш високий енергетичний стан, так, щоб зміна амплітуди в цих двох станах набувала кінцевого значення. При цьому, якщо під'єднати до вільної межі розглянутої системи спиновід (тонку смугу магнетика), у якому можуть поширюватись біжучи спинові хвилі, то амплітуда цих збуджених хвиль через граничні умови на інтерфейсі буде залежати від амплітуди стаціонарних збуджень в вихідній системі кінцевої довжини. В цьому випадку просторова структура збуджень буде дещо відрізнятися від тієї, яку мають стаціонарні стани, що розглянуті у даній роботі через зворотню дію спіноводу. Самі граничні умови матимуть достатньо складний вигляд. Однак, у випадку «слабкого» зв'язку між двома підсистемами в основному наближенні в якості амплітуди на межі поділу можна використовувати амплітуду стаціонарних станів, що були розглянуті вище. Таким чином, зовнішнім локалізованим полем можна керувати амплітудою біжучих хвиль. Зокрема при зміні амплітуди зовнішнього поля амплітуда біжучої хвилі може змінюватись стрибкоподібно. Але ця задача потребує окремого розгляду.

Робота частково зроблена в межах цільової програми Ф-26-5 ФТИНТ НАН України.

Список літератури

- Serga A. A., Chumak A. V., Hillebrands B. YIG magnonics. *Physics D: Applied Physics*. 2010. Vol. 43, No. 26. Article No. 264002. doi: 10.1088/0022-3727/43/26/264002.
- Kruglyak V. V., Demokritov S. O., Grundler D. Magnonics. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2010. Vol. 43, No. 26. Article No. 264001. doi: 10.1088/0022-3727/43/26/264001.
- Chumak A. V., Serga A. A., Hillebrands B. Magnon spintronics. *Nature Physics*. 2015. Vol. 11, No. 6. P. 453–461. doi: 10.1038/nphys3346.
- Demokritov S. O., Slavin A. N. Magnonics: from fundamentals to applications. *Topics in Applied Physics*. 2013. Vol. 125. P. 1–531. doi: 10.1007/978-3-642-30247-3.
- Merbouche H., Divinskiy B., Gouéré D., Lebrun R., El-Kanj A., Cros V., Bortolotti P., Anane A., Demokritov S. O., Demidov V. E. True amplification of spin waves in magnonic nano-waveguides. *Nature Communications*. 2024. Vol. 15, No. 1. Article No. 1560. doi: 10.1038/s41467-024-45783-1.
- Qin H., Holländer R. B., Flajšman L., van Dijken S. Low-loss nanoscopic spin-wave guiding in continuous yttrium iron garnet films. *Nano Letters*. 2022. Vol. 22, No. 14. P. 5956–5963. doi: 10.1021/acs.nanolett.2c01238.
- Qin H., Flajšman L., van Dijken S. Low-loss YIG-based magnonic crystals with large tunable bandgaps. *Nature Communications*. 2018. Vol. 9. Article No. 5445. doi: 10.1038/s41467-018-07893-5.
- Santos O. A., van Wees B. J. Magnon confinement in an all-on-chip YIG cavity resonator using hybrid YIG/Py magnon barriers. *Nano Letters*. 2023. Vol. 23, No. 18. P. 8643–8649. doi: 10.1021/acs.nanolett.3c02388.
- Bensmann J., Klingler S., Fuchs G. D., Chumak A. V., Hillebrands B. Dispersion-tunable low-loss implanted spin-wave waveguides for large magnonic networks. *Nature Materials*. 2025. Vol. 24, No. 11. P. 1920–1926. doi: 10.1038/s41563-025-02282-y.
- Demidov V. E., Urazhdin S., Demokritov S. O. Spin-wave propagation in a ring-shaped magnonic resonator connected to a YIG waveguide. *Applied Physics Letters*. 2025. Vol. 127, No. 16. Article No. 162405. doi: 10.1063/5.0286108
- Nikolaev K. O., Lake S. R., Mohapatra B. D., Schmidt G., Demokritov S. O., Demidov V. E. Highly efficient coherent amplification of zero-field spin waves in YIG nanowaveguides. *Science Advances*. 2025. Vol. 11, No. 3. Article No. eadx2018. doi: 10.1126/sciadv.adx2018.
- Khutueva A. B., Sadovnikov A. V., Garanin F. E., Anisimov R. A., Kalinova A. E., Sheshukova S. E. Spin-wave propagation in YIG waveguides with magnetic microvolcanoes. *Applied Physics Letters*. 2025. Vol. 126, No. 6. Article No. 062402. doi: 10.1063/5.0241539.
- Khivintsev Y. V., Sadovnikov A. V., Beginin E. N., Sheshukova S. E., Nikitov S. A. Spin waves in YIG-based magnonic networks: design and technological aspects. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2021. Vol. 545. Article No. 168754. doi: 10.1016/j.jmmm.2021.168754.
- Sato N., Sekiguchi K., Nozaki Y., Tanaka T., Hirata Y. Three-port logic gate using forward-volume spin-wave interference in YIG film. *Scientific Reports*. 2019. Vol. 9. Article No. 52889. doi: 10.1038/s41598-019-52889-w.
- Demidov V. E., Urazhdin S., Demokritov S. O. Spin-wave microscale RF delay lines for mid- and high-frequency bands. *Journal of Applied Physics*. 2025. Vol. 138, No. 4. Article No. 043902. doi: 10.1063/5.0286108.
- Heinz B., Brächer T., Schneider M., Wang Q., Längel B., Friedel A. M., Chumak A. V. Propagation of spin-wave packets in individual nanosized YIG magnonic conduits. *Nano Letters*. 2020. Vol. 20, No. 6. P. 4220–4227. doi: 10.1021/acs.nanolett.0c00657.
- Schneider M., Brächer T., Chumak A. V., Serga A. A., Hillebrands B. Long-range spin-wave propagation in transversely magnetized nano-scaled YIG conduit. *Applied Physics Letters*. 2021. Vol. 118, No. 13. Article No. 132406. doi: 10.1063/5.0045624.
- Pang S., Li Z., Wang Z., Lv Y., Song F., Yan P., Zhang J. Observation of Magnetostatic Surface Spin Wave Solitons in Yttrium Iron Garnet. *Thin Film. Preprint*. 2025. arXiv:2511.16433. doi:10.48550/arXiv.2511.16433.
- Nikolaev K. O., Das Mohapatra B., Schmidt G., Demokritov S. O., Demidov V. E. Spatially-extended nonlinear generation of short-wavelength spin waves in YIG nanowaveguides. *Preprint*. 2024. arXiv:2407.08288. doi:10.48550/arXiv.2407.08288.
- Wang Z., Cherkasskii M., Kalinikov B. A., Carr L. D., Wu M. Formation of Bright Solitons from Wave Packets with Repulsive Nonlinearity. *Preprint*. 2015. arXiv:1505.01882. doi:10.48550/arXiv.1505.01882.
- Belan V. I., Kovalev A. S., Peretyatko A. A. Properties of quasi-soliton states in nonlinear media under local high-frequency irradiation. Analytic description and comparison with numerical simulations. *Low Temperature Physics*. 2016. Vol. 42. P. 1130–1138. doi: 10.1063/1.4973400.
- Dötsch H. Dynamics of magnetic domains in microwave fields, in *Magnetic Bubbles*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1976. P. 113–121. doi:10.1016/0304-8853(77)90031-2.
- Kovalev A. S. Frequency spectrum of monochromatic vibrations of a one-dimensional nonlinear chain of finite length. *Theoretical and Mathematical Physics*. 1978. Vol. 37, No. 3. P. 926–932. doi: 10.1007/BF01036294.
- Landau L. D., Lifshitz E. V. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowjetunion*. 1935. No.8. P.153-169. doi: 10.1016/b978-0-08-010586-4.50023-7.

References (transliterated)

- Serga A. A., Chumak A. V., Hillebrands B. YIG magnonics. *Physics D: Applied Physics*, 2010, vol. 43, No. 26, Article No. 264002, doi: 10.1088/0022-3727/43/26/264002.
- Kruglyak V. V., Demokritov S. O., Grundler D. Magnonics. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2010, vol. 43, No. 26, Article No. 264001, doi: 10.1088/0022-3727/43/26/264001.
- Chumak A. V., Serga A. A., Hillebrands B. Magnon spintronics. *Nature Physics*, 2015, vol. 11, No. 6, pp. 453–461, doi: 10.1038/nphys3346.
- Demokritov S. O., Slavin A. N. Magnonics: from fundamentals to applications. *Topics in Applied Physics*, 2013, vol. 125, pp. 1–531, doi: 10.1007/978-3-642-30247-3.
- Merbouche H., Divinskiy B., Gouéré D., Lebrun R., El-Kanj A., Cros V., Bortolotti P., Anane A., Demokritov S. O., Demidov V. E. True amplification of spin waves in magnonic nano-waveguides. *Nature Communications*, 2024, vol. 15, No. 1, Article No. 1560, doi: 10.1038/s41467-024-45783-1.
- Qin H., Holländer R. B., Flajšman L., van Dijken S. Low-loss nanoscopic spin-wave guiding in continuous yttrium iron garnet films. *Nano Letters*, 2022, vol. 22, No. 14, pp. 5956–5963, doi: 10.1021/acs.nanolett.2c01238.
- Qin H., Flajšman L., van Dijken S. Low-loss YIG-based magnonic crystals with large tunable bandgaps. *Nature Communications*, 2018, vol. 9, Article No. 5445, doi: 10.1038/s41467-018-07893-5.

8. Santos O. A., van Wees B. J. Magnon confinement in an all-on-chip YIG cavity resonator using hybrid YIG/Py magnon barriers. *Nano Letters*, 2023, vol. 23, No. 18, pp. 8643–8649, doi: 10.1021/acs.nanolett.3c02388.
9. Bensmann J., Klingler S., Fuchs G. D., Chumak A. V., Hillebrands B. Dispersion-tunable low-loss implanted spin-wave waveguides for large magnonic networks. *Nature Materials*, 2025, vol. 24, No. 11, pp. 1920–1926, doi: 10.1038/s41563-025-02282-y.
10. Demidov V. E., Urazhdin S., Demokritov S. O. Spin-wave propagation in a ring-shaped magnonic resonator connected to a YIG waveguide. *Applied Physics Letters*, 2025, vol. 127, No. 16, Article No. 162405, doi: 10.1063/5.0286108
11. Nikolaev K. O., Lake S. R., Mohapatra B. D., Schmidt G., Demokritov S. O., Demidov V. E. Highly efficient coherent amplification of zero-field spin waves in YIG nanowaveguides. *Science Advances*, 2025, vol. 11, No. 3, Article No. eadx2018, doi: 10.1126/sciadv.adx2018.
12. Khutueva A. B., Sadovnikov A. V., Garanin F. E., Anisimov R. A., Kalinova A. E., Sheshukova S. E. Spin-wave propagation in YIG waveguides with magnetic microvolcanoes. *Applied Physics Letters*, 2025, vol. 126, No. 6, Article No. 062402, doi: 10.1063/5.0241539.
13. Khivintsev Y. V., Sadovnikov A. V., Beginin E. N., Sheshukova S. E., Nikitov S. A. Spin waves in YIG-based magnonic networks: design and technological aspects. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2021, vol. 545, Article No. 168754, doi: 10.1016/j.jmmm.2021.168754.
14. Sato N., Sekiguchi K., Nozaki Y., Tanaka T., Hirata Y. Three-port logic gate using forward-volume spin-wave interference in YIG film. *Scientific Reports*, 2019, vol. 9, Article No. 52889, doi: 10.1038/s41598-019-52889-w.
15. Demidov V. E., Urazhdin S., Demokritov S. O. Spin-wave microscale RF delay lines for mid- and high-frequency bands. *Journal of Applied Physics*, 2025, vol. 138, No. 4, Article No. 043902, doi: 10.1063/5.0286108.
16. Heinz B., Brächer T., Schneider M., Wang Q., Längel B., Friedel A. M., Chumak A. V. Propagation of spin-wave packets in individual nanosized YIG magnonic conduits. *Nano Letters*, 2020, vol. 20, No. 6, pp. 4220–4227, doi: 10.1021/acs.nanolett.0c00657.
17. Schneider M., Brächer T., Chumak A. V., Serga A. A., Hillebrands B. Long-range spin-wave propagation in transversely magnetized nano-scaled YIG conduit. *Applied Physics Letters*, 2021, vol. 118, No. 13, Article No. 132406, doi: 10.1063/5.0045624.
18. Pang S., Li Z., Wang Z., Lv Y., Song F., Yan P., Zhang J. Observation of Magnetostatic Surface Spin Wave Solitons in Yttrium Iron Garnet. *Thin Film. Preprint*, 2025, arXiv:2511.16433, doi:10.48550/arXiv.2511.16433.
19. Nikolaev K. O., Das Mohapatra B., Schmidt G., Demokritov S. O., Demidov V. E. Spatially-extended nonlinear generation of short-wavelength spin waves in YIG nanowaveguides. *Preprint*, 2024, arXiv:2407.08288, doi: 10.48550/arXiv.2407.08288.
20. Wang Z., Cherkasskii M., Kalinikov B. A., Carr L. D., Wu M. Formation of Bright Solitons from Wave Packets with Repulsive Nonlinearity. *Preprint*, 2015, arXiv:1505.01882, doi:10.48550/arXiv.1505.01882.
21. Belan V. I., Kovalev A. S., Peretyatko A. A. Properties of quasi-soliton states in nonlinear media under local high-frequency irradiation. Analytic description and comparison with numerical simulations. *Low Temperature Physics*, 2016, vol. 42, pp. 1130–1138, doi: 10.1063/1.4973400.
22. Dötsch H. Dynamics of magnetic domains in microwave fields, in *Magnetic Bubbles*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1976, pp. 113–121, doi:10.1016/0304-8853(77)90031-2.
23. Kovalev A. S. Frequency spectrum of monochromatic vibrations of a one-dimensional nonlinear chain of finite length. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1978, vol. 37, No. 3, pp. 926–932, doi: 10.1007/BF01036294.
24. Landau L. D., Lifshitz E. V. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowjetunion*, 1935, No.8, pp.153-169, doi: 10.1016/b978-0-08-010586-4.50023-7.

Відомості про авторів (About authors)

Ковальов Олександр Семенович – доктор фізико-математичних наук, професор, Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Веркіна Національної академії наук України, провідний науковий співробітник; Харків, Україна; ORCID: 0009-0006-2714-230X, e-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua.

Alexander Kovalev – Doctor of Science (Physics & Math), Professor, Leading Researcher, B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of Ukrainian Academy of Sciences, Ukraine; ORCID: 0009-0006-2714-230X; e-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua.

Перетятко Анастасій Олександрович – кандидат фізико-математичних наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кафедра фізики, старший викладач; Харків, Україна; ORCID: 0009-0009-0878-1757; e-mail: Anastasii.Peretiatko@khpi.edu.ua.

Anastasii Peretiatko – Candidate of Sciences (Physics & Math), Department of Physics, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", senior lecturer; Kharkiv, Ukraine; ORCID: 0009-0009-0878-1757; e-mail: Anastasii.Peretiatko@khpi.edu.ua.

Будь ласка, посилайтесь на цю статтю наступним чином:

Перетятко А. О., Ковальов О. С. Нелінійні стаціонарні збудження ферромагнетика кінцевого розміру під впливом ВЧ-поля. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях.* – Харків: НТУ «ХПІ». 2026. № 1 (27). С. 17-29. doi:10.20998/2413-4295.2026.01.03.

Please cite this article as:

Peretiatko A., Kovalev O. Non-linear stationary excitations in a finite-size ferromagnet under the influence of a high-frequency field. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: New solutions in modern technology.* – Kharkiv: NTU "KhPI", 2026, no. 1(27), pp. 17-29, doi:10.20998/2413-4295.2026.01.03.

*Надійшла (received) 22.02.2026
Принята (accepted) 24.03.2026
Опублікована (published) 02.04.2026*