УДК 004.896 doi:10.20998/2413-4295.2026.02.12

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ МОБІЛЬНИХ РОБОТІВ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

А. О. НОСОВ[1*], М. В. КОРЖИК[1]

[1]Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, УКРАЇНА
**e-mail: andriinosov91@gmail.com*

АНОТАЦІЯ *Сучасні автономні мобільні роботи функціонують у середовищах із суттєвою невизначеністю, що виникає внаслідок неточностей динамічних моделей, стохастичних збурень, невідомих параметрів взаємодії з поверхнею та непередбачуваних зовнішніх впливів. Метою роботи є розробка конкретизованої математичної моделі адаптивної ідентифікації динаміки мобільних роботів з явною специфікацією архітектур нейромережевих компонент, функцій втрат та методів навчання, а також верифікація працездатності через чисельний експеримент з аналізом чутливості. На основі аналізу наукових публікацій 2018–2025 років виконано порівняння дев'яти методологічних підходів за критеріями точності, обчислювальної складності, здатності до кількісного оцінювання невизначеності та придатності для роботи в реальному часі. Запропоновано гібридну модель, що інтегрує номінальну модель Ейлера–Лагранжа з ансамблевим фільтром Калмана (N = 50) для параметричної адаптації, нейромережеву корекцію на основі Deep Lagrangian Network (двошарова повнозв'язна мережа з 128 нейронами та функцією втрат з енергетичним регуляризатором) для компенсації структурної невизначеності, а також контекстно-залежну адаптивну стохастичну компоненту. Розроблено трирівневу архітектуру (PLC → Edge GPU → Edge CPU) з формалізованими інтерфейсами OPC UA та ROS2 DDS, що забезпечує час циклу 4,8 мс/крок та режим graceful degradation. Працездатність підтверджено чисельним експериментом на задачі моделювання динаміки диференціального робота на трьох поверхнях (суха, мокра, промаслена): показано зниження RMSE позиції у 5,9 разів (з 0,142 м до 0,024 м) та підвищення каліброваності 95 % довірчого інтервалу з 62,3 % до 94,1 % порівняно з детермінованою моделлю.*
Ключові слова: *моделювання динаміки; мобільні роботи; стохастичні диференціальні рівняння; фільтр Калмана; Deep Lagrangian Network; цифрові двійники; невизначеність.*

MODELING DYNAMICS OF MOBILE ROBOTS UNDER UNCERTAINTY

A. O. NOSOV[1], M. V. KORZHYK[1]

[1]National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, UKRAINE

ABSTRACT *Modern autonomous mobile robots operate in environments with significant uncertainty arising from inaccuracies in dynamic models, stochastic disturbances, unknown surface interaction parameters, and unpredictable external influences. The aim of the work is to develop a specified mathematical model of adaptive identification of mobile robot dynamics with explicit specification of neural network component architectures, loss functions and training methods, and to verify performance through a numerical experiment with sensitivity analysis. Based on the analysis of scientific publications from 2018–2025, a comparison of nine methodological approaches was performed according to criteria of accuracy, computational complexity, ability to quantitatively assess uncertainty, and suitability for real-time operation. A hybrid model is proposed that integrates a nominal Euler–Lagrange model with an Ensemble Kalman Filter (N = 50) for parametric adaptation, a neural network correction based on Deep Lagrangian Network (two-layer fully connected network with 128 neurons and a loss function with energy regularization) to compensate for structural uncertainty, and a context-dependent adaptive stochastic component. A three-level architecture (PLC → Edge GPU → Edge CPU) with formalized OPC UA and ROS2 DDS interfaces has been developed, providing a cycle time of 4.8 ms/step and a graceful degradation mode. Performance is confirmed by a numerical experiment on the problem of modeling the dynamics of a differential robot on three surfaces (dry, wet, oiled): a 5.9-fold reduction in position RMSE (from 0.142 m to 0.024 m) and an increase in 95 % confidence interval calibration from 62.3 % to 94.1 % are demonstrated compared to a deterministic model.*
Keywords: *dynamics modeling; mobile robots; stochastic differential equations; Kalman filter; Deep Lagrangian Network; digital twins; uncertainty.*

Вступ

Сучасне виробництво активно впроваджує мобільні роботи для автоматизації логістичних та технологічних операцій. Ефективність автономної навігації та керування рухом критично залежить від якості математичних моделей динаміки, які описують зв'язок між керуючими сигналами та реальним переміщенням платформи. У практичних умовах динамічні моделі завжди є наближеними: параметри тертя, зчеплення коліс із поверхнею, маса вантажу та зовнішні збурення залишаються частково або повністю невідомими.

Об'єктом дослідження є процеси математичного моделювання динаміки промислових мобільних роботів в умовах параметричної, структурної та стохастичної невизначеності. Існуючі детерміновані моделі не враховують випадкових збурень і відхилень

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

параметрів, що призводить до систематичних похибок у прогнозуванні руху та зниження ефективності контурів керування.

Проблема ускладнюється тим, що різні джерела невизначеності потребують принципово різних математичних інструментів: стохастичні диференціальні рівняння для процесних збурень, баєсівські методи для параметричної невизначеності, нейромережеві апроксиматори для структурної невизначеності. Комплексне моделювання, що охоплює всі типи невизначеності у єдиній архітектурі з конкретизованими методами та експериментальним підтвердженням, залишається недостатньо дослідженим.

Аналіз стану питання

Для систематизації методів моделювання динаміки мобільних роботів в умовах невизначеності проведено аналіз дев'яти основних підходів за п'ятьма критеріями. Результати систематизовано у табл. 1.

Стохастичні моделі на основі СДР (стохастичне диференціальне рівняння) [1] забезпечують фундаментальну основу для опису випадкових збурень, поєднуючи безперервну динаміку з дискретними переключеннями режимів через марковські ланцюги. Проте вони не адресують структурну невизначеність – невідомі нелінійні ефекти (тертя Штрібека, деформації коліс), для яких аналітичний вираз принципово відсутній.

Інваріантні фільтри Калмана [2] на основі теорії груп Лі забезпечують збіжність, незалежну від траєкторії, що є принциповою перевагою над стандартними EKF. Диференційовані ансамблеві фільтри Калмана [10] розширюють цей підхід, уможливлюючи спільне навчання моделей спостереження та динаміки фільтра з даних, але обидва класи фільтрів працюють лише зі стохастичною невизначеністю та потребують зовнішньої моделі динаміки.

Фізично-інформовані нейронні мережі (PINN) [3] та, зокрема, їх структурні підкласи – Deep Lagrangian Networks (DeLaN) [11] і Hamiltonian Neural Networks (HNN) [12] – вбудовують фізичні закони збереження безпосередньо у архітектуру мережі. DeLaN параметризує функцію Лагранжа, а HNN – гамільтоніан, що обмежує простір рішень до фізично правдоподібних. Проте ці методи не надають явної оцінки невизначеності прогнозу.

Гаусові процеси (GP) [4] забезпечують калібровану ймовірнісну оцінку як прогнозу, так і його невизначеності, але мають обчислювальну складність $O(n^3)$, що обмежує масштабованість. Цифрові двійники [5] створюють «живу» модель, що еволюціонує разом із системою, але потребують значних інфраструктурних витрат. Адаптивне ковзне керування [6] гарантує стійкість за обмежених збурень, але не забезпечує ймовірнісного оцінювання. Баєсівське глибинне навчання [7] надає довірчі інтервали, але є занадто ресурсозатратним для реального часу. Рандомізація динаміки [8] забезпечує робастність до сімейства можливих динамік, але лише неявно. Поліноміальний хаос-розклад [9] дає гарантовані межі, але застосовний лише для параметричної невизначеності.

Комплексний огляд методів квантифікації невизначеності [13] систематизує підходи (баєсівські мережі, ансамблі, Monte Carlo dropout) та підтверджує, що жоден окремий метод не забезпечує одночасно високу точність, калібровану оцінку невизначеності та обчислювальну ефективність для роботи в реальному часі, що мотивує запропоновану інтеграцію.

Таблиця 1 – Порівняльна характеристика методів моделювання динаміки

Метод	Тип	Оц.	Скл.	Дані	Час
СДР + марков. перекл. [1]	Стохаст., парам.	Так (розподіл)	Низька	Мінім.	Так
InEKF на групах Лі [2]	Стохастична	Так (коваріація)	Низька	Мінім.	Так
PINN / DeLaN [3, 11]	Структурна	Неявна	Середня	Середня	Так (інф.)
GP + MPC [4]	Структ., парам.	Так (дисперсія)	Сер.–вис.	Середня	Обмежено
Цифровий двійник [5]	Стохаст., парам.	Через спостер.	Висока (сист.)	Онлайн	Так
Адапт. ковзне керув. [6]	Парам., зовн.	Ні (обмеж.)	Низька	Мінім.	Так
Баєсівське глиб. н. [7]	Структ., парам.	Так (довірчі)	Висока	Велика	Ні
Рандомізо. динаміки [8]	Парам., структ.	Неявна	Висока (навч.)	Велика (сим.)	Так (інф.)
Полін. хаос-розклад [9]	Параметрична	Так (межі)	Середня	Мінім.	Ні

Аналіз табл. 1 виявляє три закономірності. По-перше, жоден метод не адресує одночасно параметричну, стохастичну та структурну невизначеність із кількісним оцінюванням у реальному часі. По-друге, існує компроміс між багатством моделі та обчислювальною вартістю. По-третє, спостерігається тенденція до гібридизації, що мотивує розробку інтегрованої архітектури.

Мета роботи

Розробка конкретизованої математичної моделі адаптивної ідентифікації динаміки мобільних роботів з явною специфікацією архітектур нейромережевих компонент, функцій втрат та методів навчання, а також верифікація працездатності через чисельний експеримент з аналізом чутливості до гіперпараметрів.

Постановка задачі. Загальна динамічна модель колісного мобільного робота диференціального приводу описується системою Ейлера–Лагранжа:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}(t) = \boldsymbol{\tau} \qquad (1)$$

де $q = [p_x, p\_y, \varphi]^T$ – узагальнені координати; M(q) – матриця інерції; C(q, q̇) – матриця коріолісових та відцентрових сил; B – матриця в'язкого тертя; d(t) – вектор невідомих збурень; τ – вектор узагальнених сил від приводів. Невизначеність формалізується через три компоненти:

– параметрична невизначеність: $\theta = \{m, I, \mu_s, \mu\_k, r\}$ – маса, момент інерції, коефіцієнти тертя, радіус коліс відомі з точністю $\theta \in [\theta\_min, \theta\_max]$;

– стохастична невизначеність: $d(t) = d_0(t) + \sigma\_d(x)\cdot\xi(t)$, де d_0 – систематична компонента, ξ(t) – білий шум;

– структурна невизначеність: Δf(x, u) – невраховані ефекти (нелінійне тертя Штрібека, деформація коліс), для яких аналітичний вираз невідомий.

Методи дослідження. Конкретизована математична модель. Пропонується гібридна модель динаміки з трьома явно специфікованими компонентами:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f_{\text{nom}}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\theta}_t) + \delta_{\text{DLN}}(\mathbf{x},\mathbf{u};\boldsymbol{\psi}) + \sigma(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_t;\boldsymbol{\varphi})\cdot d\mathbf{W}(t) \qquad (2)$$

Компонента 1: Номінальна фізична модель

Для диференціального робота з неголономними обмеженнями кінематика та динаміка мають вигляд:

$$\dot{p}_x = v\cos(\varphi), \quad \dot{p}_y = v\sin(\varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega \qquad (3)$$

$$\hat{m}_t\dot{v} = \frac{(\tau_R + \tau_L)}{\hat{r}_t} - \hat{\mu}_t v,$$
$$\hat{I}_t\dot{\omega} = (\tau_R - \tau_L)L/(2\hat{r}_t) - \hat{\mu}_{\omega,t}\,\omega \qquad (4)$$

де v, ω – лінійна та кутова швидкості; τ_R, τ_L – моменти правого та лівого приводів; L – база робота. Параметри θ_t = {m̂_t, Î_t, μ̂_t, μ̂_ω,t, r̂_t} оновлюються онлайн через ансамблевий фільтр Калмана (EnKF) з N_ens = 50 членами ансамблю [10]:

$$\boldsymbol{\theta}_t = \boldsymbol{\theta}_{t-1} + K_t\big(\mathbf{y}_t - h(\hat{\mathbf{x}}_t)\big), \quad K_t = P_{\theta x}(P_{xx} + R)^{-1} \qquad (5)$$

де K – калманівський виграш; P – кросковаріація та коваріація, обчислені за ансамблем; R – коваріація шуму вимірювань. Вибір EnKF обґрунтовано здатністю працювати з нелінійними моделями без обчислення якобіанів, можливістю паралелізації та підтвердженою ефективністю у робототехнічних застосуваннях [10].

Компонента 2: Нейромережева корекція на основі DeLaN

Для компенсації структурної невизначеності використовується Deep Lagrangian Network [11] – підклас фізично-інформованих нейронних мереж, що параметризує функцію Лагранжа. На відміну від загальних PINN [3], DeLaN вбудовує механіку Лагранжа безпосередньо у архітектуру, гарантуючи фізичну узгодженість. Альтернативний підхід – Hamiltonian Neural Networks [12] – зберігає симплектичну структуру через параметризацію гамільтоніана, але потребує канонічних координат, що ускладнює застосування для систем з обмеженнями.

Архітектура DeLaN: двошарова повнозв'язна мережа з ReLU-активацією, 128 нейронів у кожному шарі. Вхід: $[q, \dot{q}, u] \in \mathbb{R}^9$. Мережа параметризує корекцію до функції Лагранжа ΔL(q, q̇; ψ), звідки корекційні сили обчислюються:

$$\delta_{\text{DLN}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\,\Delta L}{\partial\dot{q}}\right) - \frac{\partial\,\Delta L}{\partial q} + D(\dot{q};\,\psi_D) \qquad (6)$$

де D(q̇; ψ_D) – дисипативна компонента (одношарова мережа, 64 нейрони), що моделює неконсервативні сили [3, 11]. Лагранжева структура гарантує збереження енергії для консервативної частини.

Функція втрат:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}) = \lambda_1 \parallel \ddot{x}_{\text{pred}} - \ddot{x}_{\text{real}} \parallel^2 + \lambda_2 \parallel E_{\text{pred}} - E_{\text{real}} \parallel^2 + \lambda_3 \parallel \boldsymbol{\psi} \parallel^2 \qquad (7)$$

де перший член – помилка прогнозу прискорень; другий – помилка зміни енергії (фізичний регуляризатор); третій – L2-регуляризація. Ваги λ_1 = 1,0, λ_2 = 0,1, $\lambda_3 = 10^{-4}$ підібрані за результатами крос-валідації. Навчання: Adam ($lr = 3\cdot10^{-4}$, batch = 256, 500 епох) з подальшим онлайн-донавчанням на ковзному вікні K = 1000 спостережень.

Компонента 3: Адаптивна стохастична модель

Матриця дифузії параметризується контекстно-залежною функцією:

$$\sigma(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}_t;\boldsymbol{\varphi}) = \sigma_0\cdot\operatorname{diag}(1 + \varphi_v|v|,\, 1 + \varphi_v|v|,\, 1 + \varphi_\omega|\omega|,\, \varphi_a,\, \varphi_a) \qquad (8)$$

 ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

де σ_0 – базова інтенсивність; φ = {φ_v, φ_ω, φ_a} – параметри чутливості, оцінювані офлайн через EM-алгоритм. Контекстний вектор ξ_t = [|v|, |ω|, s_terrain, η_load, e_recent]ᵀ, де s_terrain – тип поверхні, визначений пропріоцептивним класифікатором на основі сигналів IMU та енкодерів коліс [15]; η_load – завантаженість; e_recent – середня похибка за останні 100 кроків.

Адаптивне зважування критеріїв

Якість моделі оцінюється за N = 3 критеріями: L_1 – RMSE координат; L_2 – RMSE швидкостей; L_3 – каліброваність 95 %-го довірчого інтервалу. Адаптивні ваги:

$$\alpha_i(\boldsymbol{\xi}_t) = \frac{\exp(\beta_i\, g_i(\boldsymbol{\xi}_t))}{\sum_{j=1}^{N}\exp(\beta_j\, g_j(\boldsymbol{\xi}_t))} \tag{9}$$

де g_i(ξ_t) = w_iᵀ·ξ_t + b_i – лінійна функція контексту з навченими параметрами. При русі по слизькій поверхні зростає вага L_1, при високих швидкостях – вага L_2. Параметри w_i, b_i, β_i навчаються методом крос-валідації на калібрувальному наборі.

Цифрові двійники та проблема переходу Sim-to-Real. Запропонована модель природно інтегрується з парадигмою цифрових двійників (Digital Twin), яка створює двонаправлений зв'язок між фізичним роботом та його віртуальною копією. У роботі [5] побудовано систему цифрового двійника для мобільного робота з нелінійним спостерігачем розширеного стану, що оцінює збурення обох сутностей. Важливо, що збурення фізичного та віртуального об'єктів відрізняються, відображаючи reality gap. У контексті запропонованої моделі цифровий двійник реалізує безперервне оновлення параметрів θ (через компоненту 1) та донавчання δ_DLN (через компоненту 2) на основі потоку даних від фізичного робота, забезпечуючи «живу» модель, що еволюціонує разом із системою.

Суміжною проблемою є перенос моделей із симуляції у реальний світ (Sim-to-Real). Метод рандомізації динаміки [8] під час навчання варіює параметри симулятора у широких діапазонах, змушуючи LSTM-політику неявно ідентифікувати динаміку з історії спостережень. Запропонована модель доповнює цей підхід: рандомізація може використовуватись для офлайн-претренування DeLaN-компоненти у симуляції, після чого онлайн-адаптація (компоненти 1 та 3) компенсує залишковий reality gap на реальному обладнанні. Конформне прогнозування [14] надає додатковий інструмент для отримання гарантованих (а не лише каліброваних) довірчих інтервалів на прогнози моделі без припущень щодо розподілу – перспективне доповнення для сертифікації безпеки.

Архітектура системи моделювання. Об'єднання трьох компонент потребує ієрархічної архітектури з формалізованими інтерфейсами. Характеристики рівнів подано у табл. 2.

Таблиця 2 – Характеристики рівнів архітектури

Рівень	Модель	Платформа	Час, мс	Інтерф.
1. Фізична	f_nom(x, u, θ)	PLC Siemens S7-1500	1–5	{u, θ} → {x̂_nom, M, C}
2. Нейрокор.	δ_DLN(x, u; ψ)	Edge GPU (Jetson Orin)	5–20	{x, u, q, q̇} → {δ_DLN}
3. Оцінюв.	InEKF + EnKF	Edge CPU / GPU	10–50	{y, x̂, δ, σ} → {x̂, P, θ̂}

Рівень 1 (PLC) виконує номінальну модель із гарантованим часом циклу та реалізує аварійну логіку безпеки. Рівень 2 обчислює корекцію DeLaN; інференс мережі 9→128→128→3 потребує близько 2 мс на Jetson Orin Nano. Рівень 3 виконує EnKF (N = 50) для оцінювання стану та параметрів; складність $O(N\cdot n^2) \approx O(1250)$ операцій на крок.

Ключова особливість – graceful degradation: при відмові рівня 2 система працює на номінальній моделі; при відмові рівня 3 PLC використовує останні параметри θ у консервативному режимі. Обмін даними між рівнями здійснюється через OPC UA (рівні 1↔3, 10 Гц) та ROS2 DDS (рівні 2↔3, 50 Гц).

Результати чисельного моделювання. Для верифікації проведено чисельний експеримент: диференціальний робот (m = 15 кг, I = 0,5 кг·м², r = 0,05 м, L = 0,3 м) виконує S-подібний маневр (v = 0,5–1,5 м/с, 60 с) на трьох поверхнях: суха підлога (μ = 0,8), мокра плитка (μ = 0,3), промаслена поверхня (μ = 0,1). Додано стохастичні збурення (σ_0 = 0,05) та нелінійне тертя Штрібека як невідомий структурний ефект. Пропріоцептивний класифікатор поверхні [15] моделюється ідеальним з затримкою 0,2 с.

Порівняно три моделі: (A) детермінована Ейлера–Лагранжа з фіксованими параметрами; (B) адаптивна фізична модель з EnKF; (C) повна запропонована модель. Результати за 100 реалізацій Монте-Карло наведено у табл. 3.

Таблиця 3 – Результати чисельного експерименту (100 реалізацій МК)

Показник	(A)	(B)	(C)
RMSE позиції, м	0,142 ± 0,031	0,067 ± 0,018	0,024 ± 0,009
RMSE швидкості, м/с	0,098 ± 0,022	0,041 ± 0,012	0,016 ± 0,006
Каліброваність 95 %, %	62,3 ± 5,1	88,7 ± 3,2	94,1 ± 1,8
Час на крок, мс	0,3 ± 0,1	2,1 ± 0,4	4,8 ± 0,9

Повна модель знижує RMSE позиції у 5,9 разів порівняно з (A) та у 2,8 разів порівняно з (B). Каліброваність 94,1 % (проти 62,3 % у (A)) означає, що контролер матиме коректне уявлення про надійність прогнозів. Час 4,8 мс прийнятний для типового періоду дискретизації 20–50 мс. Додаткові експерименти з переключенням поверхонь показали виявлення зміни тертя за 0,5–1,0 с (25–50 кроків), після чого точність відновлюється.

Аналіз чутливості до гіперпараметрів

Для оцінки робастності результатів проведено аналіз чутливості моделі (C) до ключових гіперпараметрів. Результати у табл. 4.

Таблиця 4 – Аналіз чутливості (RMSE позиції, м) при варіації гіперпараметрів

Гіперпарам.	Знижене	Базове	Підвищене
N_ens: 20 / 50 / 100	0,031 ± 0,012	0,024 ± 0,009	0,022 ± 0,008
DeLaN шари: 64 / 128 / 256	0,029 ± 0,011	0,024 ± 0,009	0,023 ± 0,009
$λ_2$: 0,01 / 0,1 / 1,0	0,028 ± 0,010	0,024 ± 0,009	0,032 ± 0,013
K (вікно): 500 / 1000 / 2000	0,027 ± 0,010	0,024 ± 0,009	0,025 ± 0,009

Аналіз показує помірну чутливість до більшості гіперпараметрів: збільшення ансамблю з 50 до 100 дає лише 8 % покращення при подвоєнні обчислювальних витрат, що підтверджує обгрунтованість вибору N = 50. Найбільш чутливим є вага фізичного регуляризатора $λ_2$: при $λ_2 = 1,0$ (надмірний регуляризатор) RMSE зростає на 33 %, оскільки мережа занадто обмежена у компенсації структурних ефектів. При $λ_2 = 0,01$ (слабкий регуляризатор) RMSE зростає на 17 % через втрату фізичної узгодженості. Це підтверджує критичну роль балансу між точністю апроксимації та фізичним обмеженням у гібридних моделях.

Обговорення обмежень

Необхідно зазначити обмеження поточної роботи. По-перше, верифікація проведена лише у чисельному експерименті, а не у повноцінній симуляції (ROS/Gazebo) або на реальному обладнанні. Чисельний експеримент контролює всі змінні, що дозволяє ізолювати внесок кожної компоненти, але не відтворює повною мірою складності реального середовища (затримки комунікації, шуми датчиків, обмежена точність актуаторів). По-друге, гіперпараметри DeLaN (кількість шарів, нейронів, швидкість навчання) підібрані через крос-валідацію, але не через систематичний пошук (наприклад, баєсівську оптимізацію). Аналіз чутливості (табл. 4) показує помірну залежність від цих параметрів, що частково знімає це обмеження. По-третє, ансамбль із 50 членів може бути недостатнім для задач вищої розмірності (наприклад, маніпулятори з 6+ ступенями свободи). По-четверте, пропріоцептивний класифікатор поверхні [15] у експерименті моделюється ідеальним із затримкою 0,2 с; у реальній системі класифікація має власну похибку (близько 5–15 % за даними [15]), яка поширюється через контекстний вектор на адаптивні ваги.

Висновки

Розроблено конкретизовану математичну модель адаптивної ідентифікації динаміки мобільних роботів, що інтегрує три компоненти: номінальну модель Ейлера–Лагранжа з ансамблевим фільтром Калмана (N = 50) для параметричної адаптації; Deep Lagrangian Network (2×128, функція втрат з енергетичним регуляризатором $λ_2 = 0,1$) для компенсації структурної невизначеності; та контекстно-залежну стохастичну модель для процесних збурень. Порівняльний аналіз дев'яти існуючих підходів виявив відсутність методу, що одночасно адресує всі три типи невизначеності із кількісним оцінюванням у реальному часі. Трирівнева архітектура (PLC → Edge GPU → Edge CPU) з інтерфейсами OPC UA / ROS2 DDS забезпечує час 4,8 мс/крок та graceful degradation. Чисельний експеримент на задачі з трьома поверхнями показав зниження RMSE позиції у 5,9 разів (0,024 м проти 0,142 м) та підвищення каліброваності 94,1 % проти 62,3 %. Аналіз чутливості підтвердив помірну залежність від гіперпараметрів та критичну роль фізичного регуляризатора ($λ_2$) у балансі точності та фізичної узгодженості. Перспективи подальших досліджень включають експериментальну верифікацію на платформі TurtleBot3 у ROS/Gazebo та на реальному обладнанні; розширення DeLaN до Hamiltonian Neural Network [12] для збереження симплектичної структури; інтеграцію з конформним прогнозуванням [14] для гарантованих довірчих інтервалів; дослідження масштабованості для маніпуляторів з 6+ ступенями свободи; впровадження диференційованого EnKF [10] для наскрізного навчання; та федеративне навчання DeLaN для флотів роботів.

Список літератури

1. Vesentini F., Di Persio L., Muradore R. A Brownian–Markov Stochastic Model for Cart-Like Wheeled Mobile Robots. European Journal of Control. 2023. Vol. 70. Article 100771. DOI: 10.1016/j.ejcon.2022.100771.
2. Hartley R., Ghaffari M., Eustice R. M., Grizzle J. W. Contact-Aided Invariant Extended Kalman Filtering for Robot State Estimation. The International Journal of Robotics Research. 2020. Vol. 39, № 4. P. 402–430. DOI: 10.1177/0278364919894385.

ISSN 2079-5459 (print)
ISSN 2413-4295 (online)

3. Liu J., Borja P., Della Santina C. Physics-Informed Neural Networks to Model and Control Robots: A Theoretical and Experimental Investigation. Advanced Intelligent Systems. 2024. Vol. 6, № 5. Article 2300385. DOI: 10.1002/aisy.202300385.
4. Hewing L., Kabzan J., Zeilinger M. N. Cautious Model Predictive Control Using Gaussian Process Regression. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2020. Vol. 28, № 6. P. 2736–2743. DOI: 10.1109/TCST.2019.2949757.
5. Zhao L., Nie Z., Xia Y., Li H. Virtual–Physical Tracking Control for a Car-Like Mobile Robot Based on Digital Twin Technology. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2024. Vol. 71, № 12. P. 16348–16356. DOI: 10.1109/TIE.2024.3387107.
6. Xie H., Zheng J., Sun Z., Wang H., Chai R. Finite-time tracking control for nonholonomic wheeled mobile robot using adaptive fast nonsingular terminal sliding mode. Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 110. P. 1437–1453. DOI: 10.1007/s11071-022-07682-2.
7. Zhou H., Ibrahim C., Zheng W. X., Pan W. Sparse Bayesian Deep Learning for Dynamic System Identification. Automatica. 2022. Vol. 144. Article 110489. DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110489.
8. Peng X. B., Andrychowicz M., Zaremba W., Abbeel P. Sim-to-Real Transfer of Robotic Control with Dynamics Randomization. Proceedings of the 2018 IEEE ICRA. IEEE, 2018. P. 3803–3810. DOI: 10.1109/ICRA.2018.8460528.
9. Wang L., Yang G. An Interval Uncertainty Propagation Method Using Polynomial Chaos Expansion and Its Application in Complicated Multibody Dynamic Systems. Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 105. P. 837–858. DOI: 10.1007/s11071-021-06512-1.
10. Liu X., Clark G., Campbell J., Zhou Y., Ben Amor H. Enhancing State Estimation in Robots: A Data-Driven Approach with Differentiable Ensemble Kalman Filters. Proceedings of the 2023 IEEE/RSJ IROS. IEEE, 2023. DOI: 10.1109/IROS55552.2023.10341617.
11. Lutter M., Listmann K., Peters J. Deep Lagrangian Networks for End-to-End Learning of Energy-Based Control for Under-Actuated Systems. Proceedings of the 2019 IEEE/RSJ IROS. IEEE, 2019. P. 7718–7725. DOI: 10.1109/IROS40897.2019.8968268.
12. Greydanus S., Dzamba M., Yosinski J. Hamiltonian Neural Networks. Advances in Neural Information Processing Systems 32 (NeurIPS). 2019. P. 15353–15363. arXiv: 1906.01563.
13. Gawlikowski J. та ін. A Survey of Uncertainty in Deep Neural Networks. Artificial Intelligence Review. 2023. Vol. 56, Suppl. 1. P. 1513–1589. DOI: 10.1007/s10462-023-10562-9.
14. Lindemann L., Cleaveland M., Shim G., Pappas G. J. Safe Planning in Dynamic Environments Using Conformal Prediction. IEEE Robotics and Automation Letters. 2023. Vol. 8, № 8. P. 5116–5123. DOI: 10.1109/LRA.2023.3292071.
15. Vulpi F., Milella A., Marani R., Reina G. Recurrent and Convolutional Neural Networks for Deep Terrain Classification by Autonomous Robots. Journal of Terramechanics. 2021. Vol. 96. P. 119–131. DOI: 10.1016/j.jterra.2020.12.002.

References (transliterated)

1. Vesentini, F., Di Persio, L. and Muradore, R. (2023) "A Brownian–Markov Stochastic Model for Cart-Like Wheeled Mobile Robots," European Journal of Control, 70, Art. 100771. DOI: 10.1016/j.ejcon.2022.100771.
2. Hartley, R., Ghaffari, M., Eustice, R. M. and Grizzle, J. W. (2020) "Contact-Aided Invariant Extended Kalman Filtering for Robot State Estimation," The International Journal of Robotics Research, 39(4), pp. 402–430. DOI: 10.1177/0278364919894385.
3. Liu, J., Borja, P. and Della Santina, C. (2024) "Physics-Informed Neural Networks to Model and Control Robots: A Theoretical and Experimental Investigation," Advanced Intelligent Systems, 6(5), Art. 2300385. DOI: 10.1002/aisy.202300385.
4. Hewing, L., Kabzan, J. and Zeilinger, M. N. (2020) "Cautious Model Predictive Control Using Gaussian Process Regression," IEEE Transactions on Control Systems Technology, 28(6), pp. 2736–2743. DOI: 10.1109/TCST.2019.2949757.
5. Zhao, L., Nie, Z., Xia, Y. and Li, H. (2024) "Virtual–Physical Tracking Control for a Car-Like Mobile Robot Based on Digital Twin Technology," IEEE Transactions on Industrial Electronics, 71(12), pp. 16348–16356. DOI: 10.1109/TIE.2024.3387107.
6. Xie, H., Zheng, J., Sun, Z., Wang, H. and Chai, R. (2022) "Finite-time tracking control for nonholonomic wheeled mobile robot using adaptive fast nonsingular terminal sliding mode," Nonlinear Dynamics, 110, pp. 1437–1453. DOI: 10.1007/s11071-022-07682-2.
7. Zhou, H., Ibrahim, C., Zheng, W. X. and Pan, W. (2022) "Sparse Bayesian Deep Learning for Dynamic System Identification," Automatica, 144, Art. 110489. DOI: 10.1016/j.automatica.2022.110489.
8. Peng, X. B., Andrychowicz, M., Zaremba, W. and Abbeel, P. (2018) "Sim-to-Real Transfer of Robotic Control with Dynamics Randomization," Proceedings of the 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation, IEEE, pp. 3803–3810. DOI: 10.1109/ICRA.2018.8460528.
9. Wang, L. and Yang, G. (2021) "An Interval Uncertainty Propagation Method Using Polynomial Chaos Expansion and Its Application in Complicated Multibody Dynamic Systems," Nonlinear Dynamics, 105, pp. 837–858. DOI: 10.1007/s11071-021-06512-1.
10. Liu, X., Clark, G., Campbell, J., Zhou, Y. and Ben Amor, H. (2023) "Enhancing State Estimation in Robots: A Data-Driven Approach with Differentiable Ensemble Kalman Filters," Proceedings of the 2023 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE. DOI: 10.1109/IROS55552.2023.10341617.
11. Lutter, M., Listmann, K. and Peters, J. (2019) "Deep Lagrangian Networks for End-to-End Learning of Energy-Based Control for Under-Actuated Systems," Proceedings of the 2019 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, IEEE, pp. 7718–7725. DOI: 10.1109/IROS40897.2019.8968268.
12. Greydanus, S., Dzamba, M. and Yosinski, J. (2019) "Hamiltonian Neural Networks," Advances in Neural Information Processing Systems 32 (NeurIPS), pp. 15353–15363. arXiv: 1906.01563.
13. Gawlikowski, J. et al. (2023) "A Survey of Uncertainty in Deep Neural Networks," Artificial Intelligence Review, 56(S1), pp. 1513–1589. DOI: 10.1007/s10462-023-10562-9.
14. Lindemann, L., Cleaveland, M., Shim, G. and Pappas, G. J. (2023) "Safe Planning in Dynamic Environments Using Conformal Prediction," IEEE Robotics and Automation Letters, 8(8), pp. 5116–5123. DOI: 10.1109/LRA.2023.3292071.

15. Vulpi, F., Milella, A., Marani, R. and Reina, G. (2021) "Recurrent and Convolutional Neural Networks for Deep Terrain Classification by Autonomous Robots," Journal of Terramechanics, 96, pp. 119–131. DOI: 10.1016/j.jterra.2020.12.002.

Відомості про авторів (About authors)

Носов Андрій Олександрович – аспірант, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна; ORCID: https://orcid.org/0009-0009-7708-1295; e-mail: andriinosov91@gmail.com.

Nosov Andrii Oleksandrovych – PhD Student, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0009-0009-7708-1295; e-mail: andriinosov91@gmail.com.

Коржик Михайло Володимирович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7636-4754; e-mail: korzhyk@kpi.ua.

Korzhyk Mykhailo Volodymyrovych – PhD, Associate Professor, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7636-4754; e-mail: korzhyk@kpi.ua.

Будь ласка, посилайтесь на цю статтю наступним чином:

Носов А. О., Коржик М. В. Моделювання динаміки мобільних роботів в умовах невизначеності. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях*. – Харків: НТУ «ХПІ». 2026. № 2 (28). С. 87-93. doi: 10.20998/2413-4295.2026.02.12

Please cite this article as:

Nosov A., Korzhyk M. Modeling dynamics of mobile robots under uncertainty. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: New solutions in modern technology*. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2026, no. 2(28), pp. 87–93, doi: 10.20998/2413-4295.2026.02.12.

Надійшла (received) 14.05.2026
Прийнята (accepted) 25.05.2026
Опублікована (published) 05.06.2026